

**CONHECIMENTO ESPECIALIZADO DO PROFESSOR QUE ENSINA
MATEMÁTICA NO TÓPICO DAS FRAÇÕES: DISCUTINDO QUANTIDADES
DISCRETAS**

**MATHEMATICS TEACHERS' SPECIALIZED KNOWLEDGE IN THE TOPIC
OF FRACTIONS: DISCUSSING DISCRETE QUANTITIES**

Alessandra Rodrigues de Almeida*
Miguel Ribeiro**

RESUMO

Frações é um dos tópicos em que alunos e professores revelam dificuldades, o que requer, portanto, uma discussão aprofundada das especificidades do conhecimento do professor por forma a promover sua compreensão também pelos alunos. Alguns dos aspectos que tornam problemático o tópico das frações referem-se ao fato de um seu pleno entendimento implicar mobilizar conhecimentos envolvendo quantidades contínuas e discretas. Tendo por base uma tarefa implementada em um contexto de formação continuada para professores que ensinam matemática, os resultados revelam que os professores detém um conhecimento sobre frações especialmente no âmbito do sentido parte-todo, mas apresentam limitações especialmente relacionadas à linguagem quando se trata das frações em contextos discretos.

Palavras-chave: MTSK. Formação continuada de professores. Frações.

ABSTRACT

Fractions is one of the topics in which both students and teachers reveal difficulties. It is thus one of the topics which requires a deeper discussion on the specificities of teachers' knowledge linked with promoting also the students understanding. Some of the aspects which make fractions problematic refer to the fact that to achieve a full understanding of such topic requires mobilize a knowledge related to continuous and discrete quantities. The analysis of a formative tasks in a professional development context for kindergarten and primary teachers reveal teachers' knowledge on fractions related with the part-whole meaning (both discrete and continuous), but enhance some limitations related to the language employed in situation involving discrete contexts.

Keywords: MTSK. Continous teachers' education. Fractions.

* Doutora em Ensino de Ciências e Matemática. Professora da Faculdade de Educação da PUC Campinas. Professora Colaboradora dos Programas de Pós-Graduação Mestrado Profissional e PECIM Unicamp. alessandra.almeida@puc-campinas.edu.br

** Doutor em Educação Matemática pela Universidade de Huelva (Espanha). Professor da Faculdade de Educação da UNICAMP. cmribas78@gmail.com

Introdução

Os números racionais, seus diferentes significados, representações e usos são considerados um dos tópicos matemáticos mais complexos a serem trabalhados na Educação Básica. Em particular, compreender (conhecer em toda a sua dimensão) os números racionais em sua representação fracionária está associado ao desenvolvimento de estruturas cognitivas fundamentais para a aprendizagem matemática (PINTO; RIBEIRO, 2013; GARCIA SILVA; PIETROPAOLO; PINHEIRO, 2016).

Nesse sentido, o estudo das frações é importante em termos práticos porque possibilita o aperfeiçoamento da habilidade de dividir e a melhor compreensão e manipulação dos problemas do mundo real (CAMPOS; RODRIGUES, 2007); em termos psicológicos, proporciona ao aluno expandir suas estruturas mentais para um desenvolvimento intelectual contínuo e na perspectiva matemática, a compreensão do número racional fornece a base para aprendizagens futuras, como operações algébricas elementares.

Consideramos que o fraco entendimento das frações impacta no aprendizado dos sentidos e representações a elas relacionados, como seja porcentagem, medidas, razão e proporção, entre outros temas. Nesse sentido, é importante ressaltar que o conhecimento do professor e as práticas matemáticas que desenvolve em sala de aula estão diretamente relacionados à aprendizagem e desempenho dos alunos (NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGE, 2004; HIEBERT; GROUWS, 2007; MELO, 2011). Assim, é fundamental investigar e discutir o conhecimento do professor sobre e para o ensino de frações, focando as especificidades desse conhecimento, de forma a compreender seus impactos nos objetivos a serem perseguidos, na qualidade das práticas desenvolvidas em sala de aula.

Não obstante é importante enfatizar que o conhecimento do professor que ensina matemática na Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental tem sido foco de atenção de diversas pesquisas, porém as especificidades desse conhecimento nem sempre têm sido consideradas. As discussões estão centradas ao nível da generalidade do conhecimento do professor, e pouco têm contribuído para a melhoria da prática e da formação do professor que atua nesses níveis escolares, (RIBEIRO, 2018). No Brasil, a *Base Nacional Comum Curricular – BNCC* (BRASIL, 2018) indica o trabalho com as frações a partir (somente) do 2.º ano do Ensino Fundamental, e propõe o estudo da ideia de metade, dobro e triplo, e ao longo do processo de escolarização o conhecimento do

tema vai se tornando mais complexo. É importante evidenciar que, embora o estudo das frações esteja previsto no currículo (oficial) das escolas há muitos anos, pesquisas têm evidenciado constantemente dificuldades relacionadas ao tema na perspectiva tanto de seu ensino, quanto de sua aprendizagem (ver, por exemplo, MAGINA; CAMPOS, 2008; MONTEIRO; PINTO, 2005; MOSS; CASE, 1999; NUNES; BRYANT, 1997; PINTO; RIBEIRO, 2013; PROENÇA, 2015).

Assim, em uma perspectiva de buscar formas de contribuir para a melhoria das aprendizagens e para resultados matemáticos dos alunos (considerados os objetivos essenciais da pesquisa em Educação Matemática que desenvolvemos¹), torna-se fundamental investigar o conhecimento do professor no âmbito das frações. Por forma a contribuir para essa melhoria é fulcral considerar as especificidades do conhecimento do professor – já que uma discussão ao nível das generalidades desse conhecimento se mostra ineficiente (RIBEIRO, 2018). Essas especificidades são consideradas na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK*² (CARRILLO et al., 2018).

Nesse contexto, esta pesquisa se pauta na seguinte questão: *Que Conhecimento Especializado revelam professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais no âmbito das frações em contextos envolvendo unidades discretas?*

Especificidades do conhecimento do professor que ensina matemática no tema frações

Uma das primeiras ideias (quando não a única) trabalhadas nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental sobre as frações é, considerá-la como uma forma de escrever a relação entre uma parte e um todo ou um determinado número de partes, quando considerando o todo dividido em um número de partes maior que as que se consideram – fração entendida como parte-todo.

De acordo com Mack (1993), a construção dos conceitos iniciais de fração depende da integração dos esquemas de contagem e particionamento. Para entender o conceito de fração, é necessário compreender que o particionamento resulta em uma

¹ Em particular este é um foco do trabalho que desenvolvemos no âmbito do CIEspMat: Grupo de pesquisa e Formação Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor que Ensina Matemática <https://ciespmat.wixsite.com/ciespmat>

² Optamos por manter a nomenclatura em inglês, pois esta é uma conceitualização do conhecimento do professor reconhecida internacionalmente, e a tradução desvirtuaria não apenas o sentido, mas, essencialmente, o conteúdo de cada um dos subdomínios que compõem o modelo que a representa.

quantidade representada por um novo número. Efetivamente, entender esta relação envolve perceber que as partes são equivalentes entre si e também o são em relação ao todo. Embora este não seja o único sentido atribuído às frações, a ideia matemática que o sustenta situa-se, tradicionalmente, no contexto escolar no centro das expectativas de compreensão do que é uma fração.

A compreensão do número racional (na sua representação em fração – que pode corresponder a uma quantidade no conjunto dos naturais, ou não) como uma fração com sentido parte-todo está tradicionalmente associada à ideia de medida de grandezas contínuas (mas essa associação não pode ser vista de forma exclusiva), que não podem ser contadas, mas comparadas com um elemento de referência (unidade de medida) previamente estabelecido, que se considera a unidade de comparação. Expressar a medida de uma grandeza em relação ao elemento de referência envolve encontrar uma quantidade que permita fazer a comparação entre os dois elementos comparáveis – o que quero medir e a referência que vou usar como medida, ou seja, determinar quantas vezes (ou que parte) a unidade de medida cabe exatamente na grandeza a ser medida. No caso particular em que a unidade de medida não cabe um número exato de vezes no objeto a ser medido, é necessário redividi-la em partes iguais, o que gera um novo tipo de número, uma fração, a qual expressa o resultado dessa divisão (CAMPOS; RODRIGUES, 2007).

No que se refere às representações usadas para ilustrar o tópico de frações, observa-se uma ênfase no uso de exemplos associados a quantidades contínuas em detrimento de exemplos associados a quantidades discretas, o que pode contribuir para o desenvolvimento da compreensão equivocada de que fração é, exclusivamente, um pedaço de algo (contínuo) como pizza ou de uma barra de chocolate (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2018; MOSS; CASE, 1999). Pitkethly e Hunting (1996) consideram que os contextos físicos para particionamento podem ser discretos ou contínuos, no entanto, os modelos discretos e contínuos de números racionais estão relacionados, mas não são os mesmos. O modelo contínuo permite subdivisões repetidas e infinitamente variadas, já o modelo discreto permite distribuir e contar como estratégias, com menos ênfase no todo. Desse modo as concepções dos alunos sobre frações podem ser diferentes se envolverem representações restritas a modelos contínuo ou discreto. O conhecimento baseado exclusivamente no modelo contínuo pode levar a interpretações literais de frações ($1/4$ representa uma das quatro partes iguais – na forma como efetuamos tipicamente a leitura), conhecimento que pode ser inadequado quando quantidades discretas estão envolvidas.

Nessa mesma perspectiva, Behr et al. (1983) enfatizam que as estratégias empregadas por crianças para resolver tarefas com números racionais associados a um modelo discreto são marcadamente distintas das utilizadas na resolução de tarefas que envolvem um modelo contínuo, assim é razoável supor que estruturas cognitivas envolvidas na resolução desses problemas também sejam diferentes. Quando a fração é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto, esta pode ser compreendida como um operador, uma vez que o denominador indica uma divisão e o numerador uma multiplicação (3/4 de 12 lápis) ou, transforma uma figura, reduzindo-a ou ampliando-a (PINTO; RIBEIRO, 2013).

Cabe salientar que as representações são fundamentais no ensino da Matemática, e contribuem para que os alunos atribuam sentido aos conteúdos estudados, complementando sua compreensão, desse modo é essencial ao professor selecionar as representações que melhor se adequam a cada situação de ensino e, nesse sentido, propiciar tarefas que envolvam frações utilizando representações associadas à quantidades discretas é essencial para ampliar a compreensão dos alunos sobre os sentidos e representações de frações.

Para promover uma efetiva aprendizagem dos números racionais, neste caso particular na sua representação em fração, por alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental³, consideramos essencial que o próprio professor detenha um conhecimento suficientemente amplo e profundo (no sentido de Ma, 1999), de modo a conceituar os temas que tem/terá de abordar, representá-los de diferentes maneiras, conhecendo as potencialidades e limitações destas, conhecer, selecionar e estabelecer suas conexões com outros conteúdos do mesmo nível, bem como com aqueles que demandem maior complexificação ou simplificação (MUÑOZ-CATALÁN; LIÑAN; RIBEIRO, 2017).

Entendemos que para desenvolver uma prática que objetive a compreensão do aluno sobre o tópico das frações e não se limite ao ensino de regras e técnicas desprovidas de significado, é requerido do professor um conhecimento especializado que transcenda o “saber fazer” e ultrapasse o uso de representações “padrão” que podem limitar a compreensão do conceito, usos e representações de frações. O conhecimento do professor é, assim, específico para a sua prática matemática e, portanto, o conteúdo e a natureza desse conhecimento matemático terá de ser também, necessariamente, especializado

³ Esta referência aos Anos Iniciais baseia-se no fato de ser o que se encontra expresso na BNCC, mas consideramos essencial que o trabalho envolvendo a unidade seja iniciado, de forma sistemática e intencional, logo desde a Educação Infantil.

(RIBEIRO, 2016). Essa especialização é considerada na perspectiva do Mathematics Teachers' Specialized Knowledge – MTSK (CARRILLO et al., 2018)⁴. Entender o nosso conhecimento como professores de/que ensinamos matemática como especializado é assumir essa especialização no âmbito tanto do conhecimento matemático quanto do conhecimento pedagógico e inclui as crenças de cada um de nós relativamente à matemática, a sua aprendizagem e a seu ensino.

No contexto do trabalho com as frações compreendemos que ao professor é essencial (mas não limitado) um conhecimento da matemática a ser ensinada – neste caso, da fração envolvendo quantidades não negativas –, porém com nível de aprofundamento, organização e estruturação superior ao que será proposto e trabalhado com os alunos, pois o conhecimento dos professores não pode diferir do conhecimento dos alunos apenas no nível do Conhecimento Pedagógico.

A Figura 1 mostra a representação da conceitualização, indicando os seus seis subdomínios. O domínio Mathematical Knowledge (MK), inclui três subdomínios: Knowledge of Topics (KoT)⁵, Knowledge of the Mathematical Structure (KSM)⁶ e Knowledge of Practices in Mathematics (KPM)⁷. O domínio Pedagogical Content Knowledge (PCK) inclui os subdomínios: Knowledge of Mathematics Teaching (KMT)⁸, Knowledge of Features of Learning (KFLM)⁹, Knowledge of Mathematics Learning Standards (KMLS)¹⁰.

Cabe destacar que o fato de a representação da conceitualização (o modelo) estar organizada em domínios e subdomínios não significa compreender o conhecimento do professor de maneira fragmentada ou compartimentada; pelo contrário, admitimos a existência de inter-relações, mas de forma operacional, o que permite uma abordagem teórica para modelar o conhecimento profissional do professor de/que ensina matemática.

⁴ Mais informações em português podem ser consultadas em Policastro, Almeida e Ribeiro (2018) ou Di Bernardo et al. (2018).

⁵ Conhecimento dos Tópicos

⁶ Conhecimento da Estrutura da Matemática

⁷ Conhecimento da Prática da Matemática

⁸ Conhecimento do Ensino de Matemática

⁹ Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática

¹⁰ Conhecimento dos Standards de Aprendizagem de Matemática

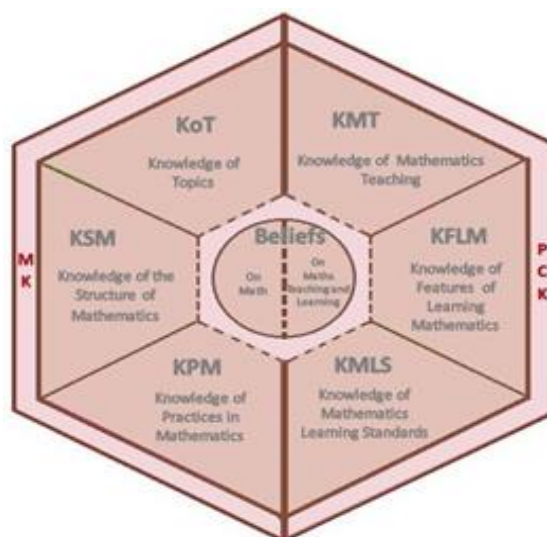


Figura 1 – Domínios do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge*

Fonte: Carrillo et al. (2018, p. 241)

O Knowledge of Topics (KoT) inclui o conhecimento dos conceitos e das proposições (teoremas, corolários, axiomas), de propriedades, procedimentos, classificações, exemplos, fórmulas e algoritmos, com seus respectivos significados e demonstrações. Como exemplos no âmbito das frações, podemos destacar um conhecimento que permita compreender os diferentes sentidos associados: parte-todo, razão, operador, quociente e medida; conhecer que as frações podem representar números, relações entre números, como uma quantidade numa comparação de quantidade de mesma natureza – quantidades extensivas, ou um índice comparativo –, comparação de quantidade de natureza diferente – quantidades intensivas (MONTEIRO; PINTO, 2005); conhecer as partes e o todo numa representação do tipo $1/3$, numa representação pictórica ou outra, observando significados distintos e diferentes tipos de unidades – contínuas e discretas; comparar quantidades de diferentes ordens de grandeza (PINTO; RIBEIRO, 2013); conhecer conceitos como frações equivalentes, frações próprias, frações impróprias e frações aparentes; identificar os números racionais numa reta numérica; operar com frações, considerando diferentes representações como numéricas e pictóricas; decompor o todo em partes e recompor o todo a partir das partes, considerando indicações, bem como outros conhecimentos associados ao tema; o conhecimento de contextos que aparecem diversas situações em que se aplicam as frações, como meio quilo; dois terços dos alunos, entre outros (ROJAS; FLORES; CARRILLO, 2015).

O Knowledge of the Structure of Mathematics (KSM) está associado ao conhecimento do professor a respeito das conexões conceituais existentes (necessárias de

serem promovidas) em um mesmo tema e entre diferentes temas e conceitos matemáticos, considerando a matemática do ano escolar em que o professor está a lecionar, as conexões de simplificação para as etapas anteriores e de complexificação do conteúdo para a escolarização futura (MONTES; CLIMENT, 2015). Relacionado a este subdomínio, exemplos desse conhecimento, no tema das frações, referem-se a conhecer a relação das frações com as demais representações de número racional, como a decimal e a porcentagem; as conexões com medidas de diferentes grandezas (geométricas, tempo, temperatura, massa, entre outras); a relação com escalas em mapas, gráficos utilizados em diferentes disciplinas, entre outros.

O Knowledge of the Practice of Mathematics (KPM) inclui o conhecimento do professor associado aos modos de produzir/fazer matemática e aos procedimentos matemáticos neles envolvidos. Entre outros elementos, podemos referir o que se entende por resolver problemas e processos envolvidos; o que é definir ou demonstrar e como se define ou demonstra; a necessidade e as implicações de uma utilização correta da linguagem e dos símbolos; o conhecimento das condições necessárias e ou suficientes para fazer declarações válidas, entre outras. No tema das frações, um exemplo refere-se à linguagem associada frequentemente apenas à fração entendida como parte-todo, ao ser verbalizada como “fração são as partes de um todo” (geralmente associado a um retângulo ou círculo dividido em partes iguais), o que gera dificuldades nos alunos nas situações em que o todo é discreto ou em que estão envolvidas quantidades maiores que o todo considerado inicialmente como referência (situações representadas por uma fração imprópria ou um numeral misto).

No subdomínio denominado KFLM está incorporado o conhecimento sobre as formas usuais de raciocínio dos alunos em determinado conteúdo, quais suas dificuldades, que aspectos que são mais compreensíveis e envolve o conhecimento de teorias que discutem a aprendizagem, como os estudos desenvolvidos por Piaget, Inhelder e Szeminska (1960), que relacionam algumas das dificuldades dos alunos para o entendimento do conceito de fração ao fato de a criança não compreender o princípio da invariância (conservação de quantidades) e não dispor de um pensamento reversível que lhe permita perceber que a soma das partes é igual ao todo inicial que as originou (MAGINA; BEZERRA; SPINILLO, 2008).

O KMT é o conhecimento que possibilita ao professor selecionar uma determinada representação ou material para o ensino de um conceito ou procedimento, bem como exemplos e tarefas para o processo de ensino. Também o conhecimento de

teorias de ensino, como, por exemplo, o ensino por meio de resolução de problemas. Este subdomínio envolve ainda a linguagem que o professor utiliza para explicar e esclarecer dúvidas dos alunos de forma que o conhecimento matemático seja válido ao longo do processo de escolarização.

O KMLS está associado ao conhecimento dos conteúdos propostos e previstos nas normas curriculares dos diferentes níveis de ensino (os conteúdos, objetivos, habilidades, competências, entre outros). Incorpora o conhecimento que ultrapassa as diretrizes estipuladas em documentos oficiais, ou seja, as recomendações de especialistas, pesquisadores e documentos reconhecidos internacionalmente como os publicados pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).

Cabe ressaltar que que aspectos associados aos subdomínios do conhecimento matemático do professor (MK), são a base para o desenvolvimento do Conhecimento Pedagógico do Conteúdo, que sustenta suas opções pedagógicas de modo a desenvolver práticas que permitam aos alunos compreenderem o que fazem, como o fazem e por que o fazem a cada momento, de modo a atribuir significado às suas aprendizagens presentes e futuras – deixando assim a “porta aberta” para aprendizagens futuras de forma compreensiva.

Contexto e método

Neste artigo focamos o Conhecimento Especializado relativamente ao domínio do conteúdo (matemática) revelado por um grupo de sete professores que participam de um curso de especialização com foco no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo¹¹ e Especializado do professor que ensina matemática na Educação Infantil e Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa no tópico das frações.

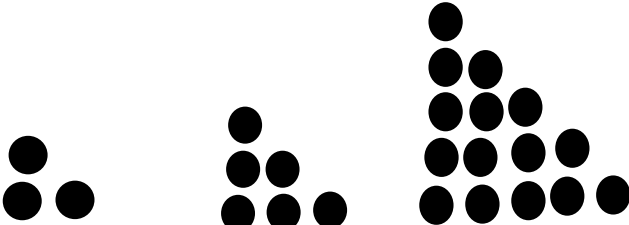
A tarefa foi implementada no decorrer de um dos encontros (com duração de oito horas) do módulo com o título “Sentidos, significados e representações de frações nos Anos Iniciais e na Educação Infantil” que decorreu no segundo semestre de 2018 e em que os autores atuaram como docentes. As informações foram coletadas através de gravações em áudio e vídeo das discussões nos grupos e das discussões em grande grupo e as produções escritas dos participantes (respostas à tarefa proposta). Os participantes trabalharam em grupos sendo duas duplas e um trio.

¹¹ Para mais informações sobre o Conhecimento Interpretativo consultar, por exemplo, Jakobsen, Ribeiro e Mellone (2014).

A tarefa para a formação de professores¹² foi implementada seguindo a estrutura das tarefas que têm sido conceitualizadas pelo grupo CIEspMat: Grupo de Pesquisa e Formação “Conhecimento Interpretativo e Especializado do Professor de/que Ensina Matemática” e encontra-se organizada em duas partes (ver, por exemplo, POLICASTRO; ALMEIDA; RIBEIRO, 2017). A Parte I envolveu a tarefa “Vamos rodear”, composta por quatro questões associadas à identificação de frações em representações em quantidades discretas – esta parte corresponde a uma tarefa que se espera alunos dos Anos Iniciais possam resolver. Primeiramente os participantes resolveram a tarefa e na sequência foram colocadas questões que envolviam identificar os conhecimentos matemáticos que a tarefa objetivava desenvolver nos alunos e o conhecimento matemático necessário para responder à tarefa.

Tarefa: Vamos rodear

Considera os conjuntos abaixo:



a) Quantas bolinhas tem cada conjunto? Explica como contaste.

b) Circule $\frac{2}{3}$ de cada conjunto de bolinhas;

c) Quantas bolinhas estão circuladas em cada uma das figuras?

d) Porque circulou um número de bolinhas diferente em cada imagem se sempre tinha de circular $\frac{2}{3}$ das bolinhas para cada conjunto?

1. Qual considera ser o foco matemático que a tarefa anterior pretende possibilitar discutir (que conhecimento matemático tem por objetivo desenvolver nos alunos)? Justifica adequadamente a tua resposta;
2. O que necessitamos saber (conhecimento matemático) para podermos responder adequadamente a esta tarefa?

Figura 2 – Tarefa para a formação de professores

Fonte: arquivo dos autores

¹² A conceitualização deste tipo de tarefas especiais tem sido um dos elementos de trabalho do grupo CIEspMat, e a sua essência associa-se à necessidade de que as tarefas para a formação de professores tenham por objetivo explícito desenvolver as especificidades do conhecimento do professor para além das dimensões pedagógicas – que têm sido o foco essencial do que tem sido feito até este momento na formação de professores e, como constatamos, sem efeitos práticos na melhoria da prática matemática. Para mais informações consultar Ribeiro (2019).

A tarefa “Vamos Rodar” foi incluída na discussão do curso com o intuito de potencializar uma discussão envolvendo o conhecimento do professor no âmbito das frações envolvendo quantidades discretas, numa perspectiva de possibilitar permitir uma ampliação da compreensão do conceito de fração, uma vez que regularmente que o ensino de frações tem sido marcadamente apoiado em práticas associadas quase exclusivamente em modelos contínuos.

A análise das produções ocorreu tendo por base o conteúdo dos diferentes subdomínios do MTSK – entendido como lente teórica que nos permite focar nos aspectos centrais do conhecimento do professor que tornam esse conhecimento especializado para o ensino da matemática. Cada autor efetuou sua análise individualmente, separando inicialmente por corretas ou incorretas – em termos da resposta fornecida à tarefa “Vamos rodar”, considerando inclusivamente as representações pictóricas apresentadas corresponder ao $\frac{2}{3}$ de bolinhas do conjunto (todo) associado a cada uma das partes indicadas ou não – e pelo tipo de representações pictóricas empregues. Posteriormente foi efetuada uma harmonização dessa análise por forma a garantir a sua consistência interna.

Complementarmente, a análise das questões 1 e 2 (que envolvem especificidade do conhecimento do professor) permitiu obter dois eixos de atenção: eixo 1 – discussões de conteúdos ou temas gerais da matemática e frações; eixo 2 – discussões de conteúdos matemáticos associados à especificidade da tarefa considerando quantidades discretas.

Resultados e discussão

Como já evidenciado, a tarefa “Vamos rodar” envolveu conhecimento matemático (consolidado ou prospectado) no nível de alunos do Ensino Fundamental. Nessa tarefa todos os professores identificaram a quantidade de bolinhas de maneira correta, 3, 6 e 15, respectivamente. Na questão sobre como realizaram a contagem todos os grupos responderam que o fizeram de 3 em 3, por colunas ou por “fileiras”, fazendo as adições correspondentes. Ao solicitar que esclarecessem como determinaram a quantidade de bolinhas, a proposta foi que observassem a disposição que estas foram apresentadas na tarefa, pois é possível estabelecer uma conexão com o Pensamento Algébrico (KSM), no entanto, essa estrutura não foi indicada pelos professores no processo de determinação dessa quantidade. Vale salientar que do ponto de vista matemático, a compreensão do número racional é um dos aspectos que sustenta a base

sobre a qual serão construídas, mais tarde, as operações algébricas elementares (CAMPOS; RODRIGUES, 2007).

Quando solicitados a circular $\frac{2}{3}$ de cada conjunto (itens b e c), e a indicar o número de bolinhas circuladas, todos os professores o fizeram corretamente (KoT – representações: saber identificar a representação de frações em quantidades discretas). No entanto não apresentam uma informação sobre as estratégias utilizadas para determinar os $\frac{2}{3}$. Seria importante esclarecer essas estratégias, pois auxiliaria na discussão de que $\frac{2}{3}$ não é apenas duas das partes de um inteiro dividido em 3 partes, mas a relação entre os elementos do conjunto em quantidades discretas, por exemplo, na segunda representação o todo é 6. No contexto apresentado, a determinação do número de bolinhas poderia ocorrer por meio da compreensão da fração como operador, no qual o numerador 2 indica uma multiplicação e o denominador 3, uma divisão, no entanto essa possibilidade não foi evidenciada pelos resolutores (KoT – definições: conhecer os diferentes sentidos das frações). Cabe salientar que quanto às formas de representações, o conhecimento especializado do professor precisa incluir os diferentes tipos de registros e representações, bem como a linguagem coerente com as estruturas pictóricas, gráficas e simbólicas, associadas aos objetivos de conhecimento matemático a serem perseguidos.

No item d) ao responderem porque o número de bolinhas que circulou em cada imagem é distinto se sempre tinha de circular $\frac{2}{3}$ das bolinhas para cada conjunto, as respostas focaram o número diferente de bolinhas em cada conjunto, conforme figura 4.

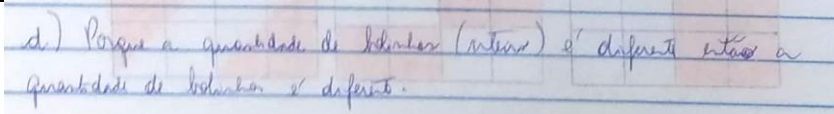
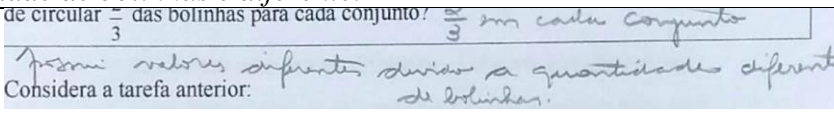
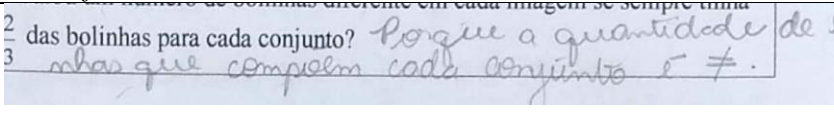
po 1	Gru	 <p><i>d) Porque a quantidade de bolinhas (inteiro) é diferente então a quantidade de bolinhas é diferente.</i></p> <p><i>Porque a quantidade de bolinhas (inteiro) é diferente então a quantidade de bolinhas é diferente.</i></p>
po 2	Gru	 <p><i>de circular $\frac{2}{3}$ das bolinhas para cada conjunto? $\frac{2}{3}$ em cada conjunto possui valores diferentes devido a quantidade diferente de bolinhas.</i></p> <p><i>2/3 em cada conjunto possui valores diferentes devido a quantidade diferente de bolinhas.</i></p>
po 3	Gru	 <p><i>$\frac{2}{3}$ das bolinhas para cada conjunto? Porque a quantidade de bolinhas que compõem cada conjunto é diferente.</i></p> <p><i>Porque a quantidade de bolinhas que compõem cada conjunto é diferente.</i></p>

Figura 3 – Respostas alínea d) “Vamos rodear”

Fonte: arquivo dos autores

Nesse sentido os professores revelam um conhecimento intuitivo da importância do todo que se considera. No entanto, o grupo 1 não responde efetivamente a questão, o que revela uma dificuldade associada ao uso de linguagem adequada para explicitar a compreensão (KoT – linguagem adequada). Cabe ressaltar que o uso articulado de diferentes representações e recursos (onde a linguagem adequada pode ser entendida como um desses recursos) é essencial para promover as aprendizagens matemáticas dos alunos (KMT – recursos: saber que o uso de linguagem matemática adequada é um recurso essencial). Fazem também referência ao termo “inteiro”, que remete às frações quando em representações contínuas, deixando a margem a ideia de que o todo/unidade pode ser um conjunto discreto, o que revela que os professores desconsideram ou desconhecem uma linguagem mais apropriada para referir-se a esse tipo de representação.

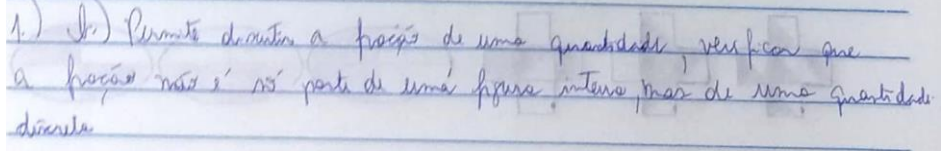
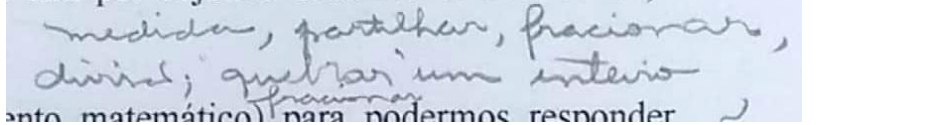
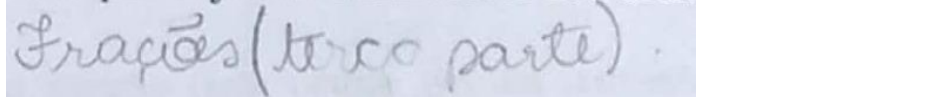
Grupo 1	 <p>Permite discutir a fração de uma quantidade, verificar que a fração não é só a parte de uma figura inteira, mas de uma quantidade discreta.</p>
Grupo 2	 <p>Medida, partilhar, fracionar, divisão, quebrar um inteiro, fracionar</p>
Grupo 3	 <p>Frações (terça parte)</p>

Figura 4 – Produções associadas a questão 1

Fonte: arquivo dos autores

O grupo 1 revela conhecimento de que a fração não está associada à parte de um todo contínuo, ou ao um (1), mas também de um todo discreto, que efetivamente era o foco da tarefa. O grupo 2 indica aspectos gerais da matemática e utiliza ainda o termo “quebrar um inteiro”, observa-se aqui também uma ideia associada à fração numa representação contínua no sentido parte-todo com a ideia da necessidade de um todo contínuo. Já o grupo 3 considera que frações e terça parte correspondem ao foco central da tarefa – ficando ao nível do imediatamente observável correlato com a própria questão formulada. Emergem aspectos associados ao conhecimento do professor relacionado com uma imprecisão da linguagem associada às frações no contexto discreto.

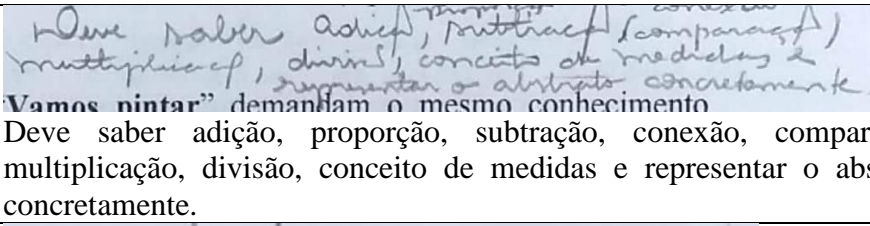
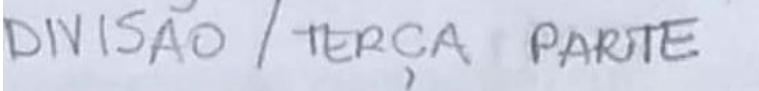
Grupo 1	Não respondeu
Grupo 2	 <p>Deve saber adição, proporção, subtração, conexão, comparação, multiplicação, divisão, conceito de medidas e representar o abstrato concretamente.</p>
Grupo 3	 <p>DIVISÃO / TERÇA PARTE</p>

Figura 5 – Produções associadas a questão 2

Fonte: arquivo dos autores

Quanto ao conhecimento necessário para responder à tarefa, apenas dois dos grupos responderam. O grupo 2 indicou aspectos relacionados à matemática geral e às frações, sem considerar o foco do contexto discreto. Já o grupo 3 indicou a divisão que pode estar relacionada à compreensão da fração como operador, no entanto os resolutores dos dois grupos não mencionam a necessidade do conhecimento associado à multiplicação, sentidos das frações, diferentes tipos de representações como pictóricas e numéricas – que são alguns dos tópicos em que se objetiva desenvolver o conhecimento do professor (KoT – definição), bem como as conexões com diferentes representações de números racionais.

É importante destacar a incompreensão revelada pelo professores sobre as frações em situações de quantidades discretas, especialmente no que se refere ao papel do todo (usualmente denominado de unidade de referência), quando este não é 1 (um) ou inteiro, mas 3, 6 ou 15, especialmente associado à linguagem utilizada para descrever a compreensão de frações nesse contexto. Estas respostas indicam limitações quanto ao conhecimento do tópico frações no âmbito do (KoT – definições e procedimentos) frações, bem como ao uso adequado da linguagem matemática (CARRILLO et al., 2018).

Estas dificuldades dos professores podem estar associadas ao fato de não terem sido confrontados, ao menos de forma explícita (ou se o foram, não atribuíram qualquer significado) com situações onde a fração é aplicada ao cardinal de um conjunto discreto (PINTO; RIBEIRO, 2013), o que implicaria igual limitação de conhecimentos para o ensino da introdução dos diferentes significados, representações e aplicações das frações.

Considerações Finais

Buscando a melhoria da prática e da formação, investigar o conhecimento do professor requerido para ensinar frações na Educação Infantil e nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental pressupõe reconhecer a especialização desse conhecimento como próprio da profissão docente – tanto no âmbito do conhecimento matemático como do conhecimento pedagógico. Nesse sentido, é essencial que tal conhecimento considere o foco na própria matemática, de modo a proporcionar aos professores (atuais ou futuros) uma compreensão ampla e profunda da matemática básica que precisam ensinar e as suas conexões com a matemática avançada.

Os professores revelam conhecimentos relacionados às frações, ficando patentes algumas das dificuldades que se tornam elementos cruciais de foco urgente de se ampliar e aprofundar no que se refere ao conhecimento do professor nesse tema matemático, indo além do saber fazer (do nível dos alunos que terão de ensinar) e a seleção de representações e contextos que vão além das usuais “pizza e barra de chocolate” tão comuns nos livros didáticos, pois se propuserem situações de ensino essencialmente com foco na definição técnica de fração como parte-todo em contextos contínuos, leva os alunos a desenvolverem uma noção empobrecida (parcial) de número racional.

Torna-se, assim, essencial que a formação de professores (inicial e contínua) passe a centrar-se no desenvolvimento das especificidades do conhecimento do professor de/que ensina matemática de forma a contribuir para melhorar a prática matemática do professor e, portanto, as aprendizagens dos alunos – já que esse conhecimento impacta diretamente nos resultados dos alunos (ver, por exemplo, NYE; KONSTANTOPOULOS; HEDGE, 2004). No caso específico das frações esse conhecimento necessário de desenvolver relaciona-se, entre outros, com o uso de diferentes representações (aqui contínuas e discretas) e as conexões entre diferentes tópicos.

Referências

BEHR, M. J. et al. Rational number concepts. Acquisition of mathematics concepts and processes. In: LESH, R.; LANDAU, M. Acquisition of mathematics concepts and processes. New York: Academic Press, 1983. p. 91-126.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. 4. ed. Brasília, DF: MEC, 2018.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A ideia de unidade na construção do conceito do número racional. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis, v. 2, n. 1, p. 68-93, 2007.

CARRILLO, J. et al. The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. **Research in Mathematics Education**, v. 20, n. 3, p. 236-253, 2018.

DI BERNARDO, R. et al. Conhecimento matemático especializado de professores da educação infantil e anos iniciais: conexões em medidas. **Cadernos Cenpec**, v. 8, p. 98-124, 2018.

GARCIA SILVA, A. F.; PIETROPAOLO, R. C.; CARVALHO, M. P. Conhecimento matemático para o ensino das frações: um estudo desenvolvido com professores dos anos iniciais. **Boletim Gepem**, Rio de Janeiro, n. 69, p.118-140, jul./dez. 2016

HIEBERT, J.; GROUWS, D. A. The effects of classroom mathematics teaching on students' learning. **Second handbook of research on mathematics teaching and learning**, v. 1, p. 371-404, 2007.

JAKOBSEN, A.; RIBEIRO, C. M.; MELLONE, M. Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. **Nordic Studies in Mathematics Education**, v. 19, n. 3-4, p. 135-150, 2014.

MA, L. **Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the US**. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, 1999.

MACK, N. K. Learning rational numbers with understanding: the case of informal knowledge. In: CARPENTER, T. P.; FENNEMA, E.; ROMBERG, T. A. (Eds.). **Studies in mathematical thinking and learning. Rational numbers: An integration of research**. Hillsdale, NJ, US: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., 1993. p. 85-105.

MAGINA, S.; BEZERRA, F. B.; SPINILLO, A. Como desenvolver a compreensão da criança sobre fração: uma experiência de Ensino. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, DF, v. 90, n. 225, p. 489-510, 2009.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. A fração nas perspectivas do professor e do aluno dos dois primeiros ciclos do ensino fundamental. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 21, n. 31, 2008.

MELO, M. B. P. Contributos para a compreensão do Efeito Professor TEIP: proposta de um programa de pesquisa. **Sociologia - Revista da Faculdade de Letras da Universidade do Porto**, v. 21, p. 159-169, 2011.

MONTES, M.; CLIMENT, N. Conocimiento de la estructura matemática (KSM): presentación y réplica. In: CARRILLO, J; CONTRERAS, L. C.; MONTES, M. (ed.) **Actas de las II Jornadas del seminario de investigación de didáctica de la matemática de la Universidad de Huelva**. Huelva, Espanha, 2015. p. 21-29.

- MONTEIRO, C.; PINTO, H. A aprendizagem dos números racionais. **Quadrante**, Lisboa, v. 14, n. 1, p. 89-107, 2005.
- MOSS, J.; CASE, Robbie. Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, p. 122-147, 1999.
- MUÑOZ-CATALAN, M. C.; LINAN, M. M.; RIBEIRO, M. Conocimiento especializado para enseñar la operación de resta en Educación Infantil. **Cadernos de Pesquisa (UFMA)**, São Luís, v. 24, p. 4-19, 2017.
- NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
- PIAGET, J.; INHELDER, B.; SZEMINSKA, A. **The child's conception of geometry**. New York: Basic Books, 1960.
- PITKETHLY, A.; HUNTING, R. A review of recent research in the area of initial fraction concepts. **Educational Studies in Mathematics**, v. 30, p. 5-38, 1996.
- PINTO, H.; RIBEIRO, M. Conhecimento e formação de futuros professores dos primeiros anos—o sentido de número racional. **Da investigação às Práticas**, Lisboa, v. 3, n. 1, p. 80-98, 2013.
- POLICASTRO, M. S.; ALMEIDA, A. R.; RIBEIRO, M. Conhecimento especializado revelado por professores da educação infantil e dos anos iniciais no tema de medida e comprimento e sua estimativa. **Revista Plural**, Cascavel, p. 123-154, 2017
- PROENÇA, M. C. O ensino de frações via resolução de problemas na formação de futuras professoras de pedagogia. **Bolema – Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 29, n. 52, p.729-755, 2015.
- RIBEIRO, M. Tareas para alumnos y tareas para la formación: discutiendo el conocimiento especializado del profesor y del formador de profesores de matemáticas. In: JORNADAS NACIONALES DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA - SOCHIEM, 20., **Anais...** Valparaíso: Chile, 2016. p. 31-39.
- RIBEIRO, M. Das Generalidades às Especificidades do Conhecimento do Professor que Ensina Matemática: Metodologias na Conceitualização (Entender e Desenvolver) do Conhecimento Interpretativo. In: OLIVEIRA, A. M. P. de; ORTIGÃO, M. I. R. (Org.). **Abordagens teóricas e metodológicas nas pesquisas em educação matemática**. Brasília, DF: SBEM, 2018. p. 167-185.
- RIBEIRO, M; ALMEIDA, A. R.; MELLONE, M. Desenvolvendo as especificidades do conhecimento interpretativo do professor e tarefas para formação. In.: GIRALDO, V.; VIOLA, J.; ELIAS, H. R. (Eds). **Problematizações sobre a Formação Matemática na Licenciatura em Matemática**. [s.l.] SBEM, 2019. (no prelo)

ROJAS, N.; FLORES, P.; CARRILLO, J. Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. **Boletim de Educação Matemática**, v. 29, n. 51, p. 143-166, 2015.