GEOGEBRA E GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA PROPOSTA PARA O ENSINO DO CÁLCULO DA DISTÂNCIA ENTRE DOIS PONTOS NO PLANO

GEOGEBRA AND ANALYTICAL GEOMETRY: A PROPOSAL FOR TEACHING THE CALCULATION OF THE DISTANCE BETWEEN TWO POINTS IN THE PLANE

Carlos Eduardo Cardoso*

RESUMO

O ensino da Matemática vem se tornando tema de discussões e análises nos últimos anos, em especial aqui no Brasil, tendo como base o baixo rendimento dos estudantes em avaliações internas e externas. O uso da tecnologia vem sendo empregado não apenas como ferramenta motivadora, mas como uma forma de mostrar novos caminhos e ampliar a visão dos estudantes sobre conceitos matemáticos essenciais para a sua formação básica. Nesse sentido, o Geogebra não veio para substituir a parte conceitual, que é essencial para a construção de uma base sólida e para a resolução dos problemas propostos, mas como um aliado para a resolução de problemas chave apresentados ao longo das aulas. Nosso foco é apresentar uma sequência didática que associe a construção conceitual com sua aplicação na resolução de problemas.

Palavras-chave: Geogebra. Resolução de Problemas. Geometria Analítica.

ABSTRACT

The teaching of mathematics has become a topic of discussion and analysis in recent years, especially here in Brazil, based on the low income of students in internal and external evaluations. The use of technology has been used not only as a motivational tool but as a way to show new ways and broaden the students' vision of mathematical concepts essential for their basic training. In this sense, Geogebra did not come to replace the conceptual part, which is essential for building a solid foundation and for solving the proposed problems, but as an ally for solving key problems presented throughout the lessons. Our focus is to present a didactic sequence that associates conceptual construction with its application in problem solving**.**

Keywords: Geogebra. Troubleshooting. Analytical Geometry.

Introdução

A Matemática, abstrata como é, não sofre de constrangimentos físicos: podemos sempre recomeçar do zero, experimentar novas vias de ataque ou retroceder a qualquer instante (TAO, 2013). Partindo desse pressuposto, nosso papel como educador é sempre

* Oficial do Magistério Militar na Academia da Força Aérea e Docente na Faculdade de Engenharia de Agrimensura de Pirassununga – FEAP. profcarlosecardoso@gmail.com

o de instigar, motivar, mostrar ao aluno que o processo de ensino e aprendizagem nem sempre é linear e pode, na maioria das vezes, apresentar altos e baixos. Assim, a construção de conceitos vai muito além da aplicação de fórmulas prontas para se obter resultados esperados. É necessário dedicação e a abstração de muitos conceitos, por mais simples que pareçam.

Segundo o currículo do Estado de São Paulo, é fundamental que a valorização da contextualização seja equilibrada com o desenvolvimento de outra competência igualmente valiosa: a capacidade de abstrair o contexto, de aprender relações que são válidas em múltiplos contextos e, sobretudo, a capacidade de imaginar situações fictícias, que não existem concretamente, ainda que possam vir a ser realizadas. Dessa maneira desenvolvemos uma sequência didática que fizesse com que o aluno aprendesse os conceitos básicos de geometria analítica, envolvendo pontos no plano e distância entre dois pontos no plano, e os aplicasse na resolução de problemas contextualizados. O uso do software Geogebra foi essencial para que os alunos se sentissem motivados e sempre prontos para recomeçar.

1 Geogebra

O software de Geometria Dinâmica, Geogebra, que alia Álgebra e Geometria (daí a origem do seu nome), foi criado pelo matemático austríaco Markus Hohenwarter. Trata-se de um software gratuito e que utiliza a linguagem Java. Com ele podemos manipular objetos geométricos, estudar o comportamento de funções e inúmeras outras situações do contexto matemático. No site www.geogebra.org é possível obter manuais e fazer o download deste software.

A figura 1 mostra a tela inicial do Geogebra, onde podemos observar algumas de suas funções, em especial, a barra de ferramentas, a janela de álgebra, a janela de visualização e o campo entrada. Estas foram as principais ferramentas utilizadas ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

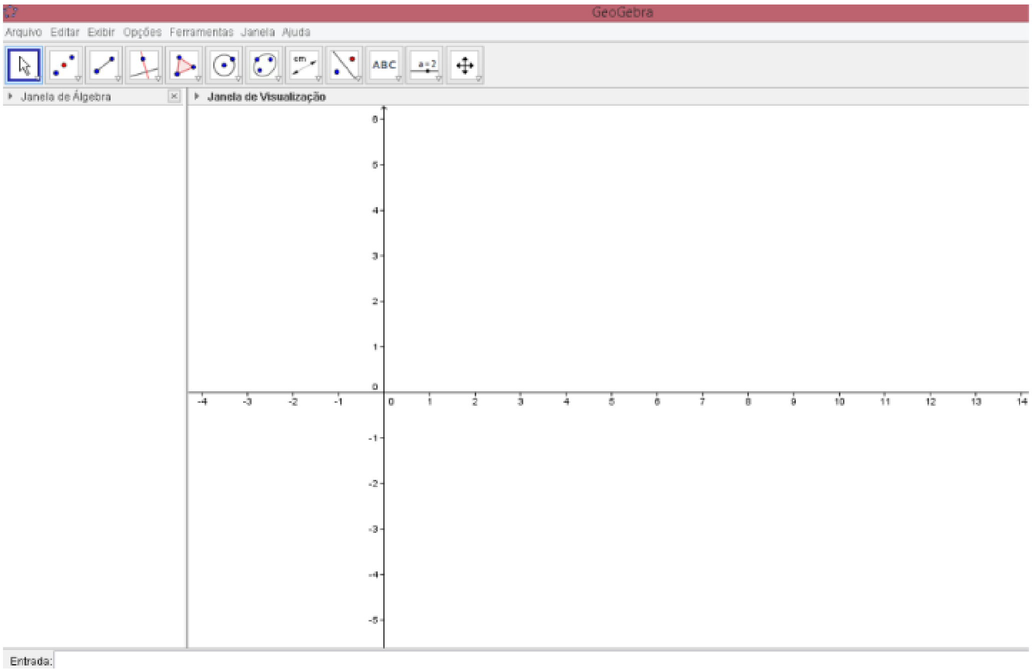

Figura 1: Tela Inicial do Geogebra

Com o auxílio da barra de ferramentas, podemos fazer inúmeras construções geométricas e analisar o comportamento dessas construções. Na Janela de Visualização, podemos contar com o auxílio do plano cartesiano e fazer construções diretas com as ferramentas disponíveis. O Campo Entrada permite a construção geométrica com uma maior precisão.

Todas essas ferramentas permitem ao aluno interagir e aplicar conceitos que antes eram abordados somente em livros ou pelo professor na lousa. Desta forma, ele se torna parte essencial do processo, sentindo-se importante e colaborativo, transformando dúvidas em questionamentos ao longo de todo o processo.

2 Calculando a Distância entre dois pontos no plano

Entende-se por distância entre dois pontos no plano, como sendo o comprimento do segmento formado por esses dois pontos. Intuitivamente os alunos tem essa noção, mas apresentam algumas dificuldades em desenvolver esse mesmo raciocínio de forma algébrica e até mesmo aplicá-lo na resolução de problemas. Nesse sentido, o objetivo das atividades aqui apresentadas é de fazer com que o aluno, a partir da prática, chegue a essa conclusão de maneira natural. Para tanto, o uso de alguns conceitos é essencial.

Começamos então pela retomada de conceitos básicos, como o entendimento do que é um ponto e como representá-lo no plano cartesiano.

Para que essa aprendizagem seja real, iniciamos com a apresentação do plano cartesiano, no Geogebra, e a localização de alguns pontos. Segue a atividade proposta:

Atividade Prática 1: Utilize o campo **ENTRADA** no Geogebra e localize os seguintes pontos: $A = (2,3), B = (-4,1), C = (-3,-3), D = (1,-2), E = (3,0), F = (0,4), G = (-2,0), H = (0,-4)$. Com base nas construções:

a) Sabemos que o plano cartesiano é formado por duas retas perpendiculares, denominados eixos coordenados (eixo x ou eixo das abscissas e eixo y ou eixo das ordenadas), que dividem o plano em 4 partes, denominadas quadrantes. O que podemos observar em relação aos valores e também em relação aos sinais de cada coordenada dos pontos apresentados?

b) Alguns dos pontos localizados encontram-se sobre os eixos coordenados. Quais são as principais características desses pontos em relação as suas coordenadas?

c) Cada ponto é representado no plano cartesiano de acordo com as suas coordenadas. Os pontos $P = (2,0)$ e $Q = (0,2)$ possuem mesma localização? Justifique.

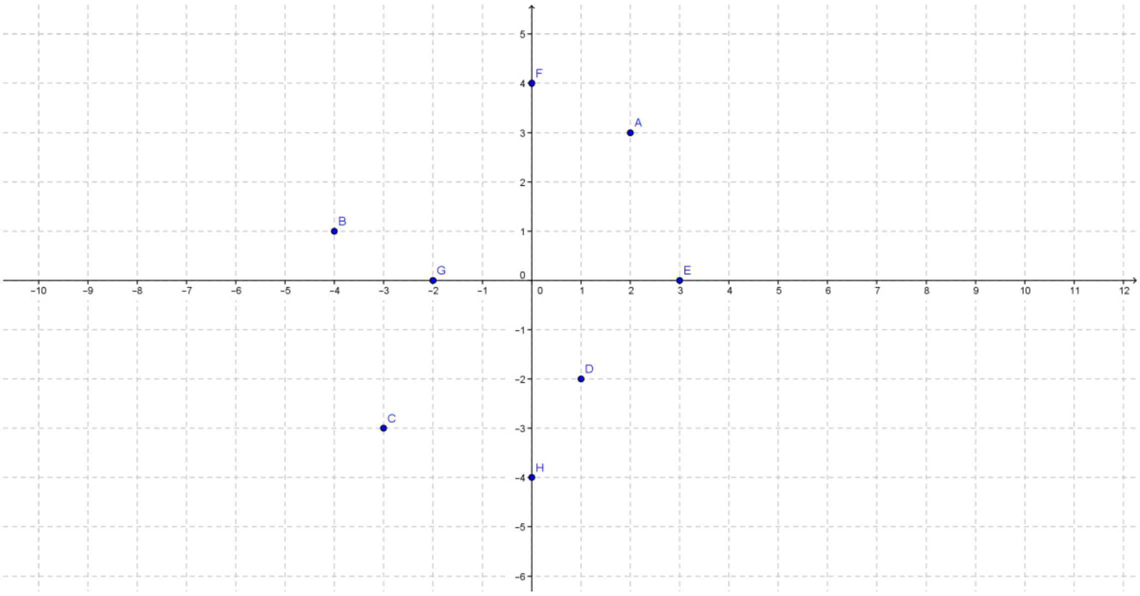

Figura 2: Atividade Prática 1

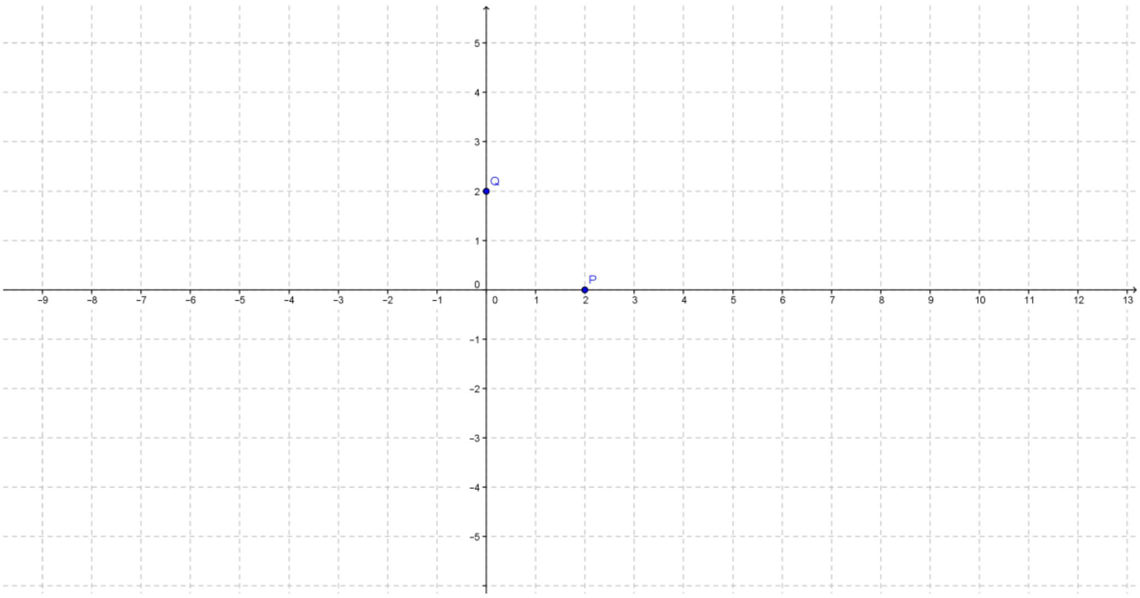

Figura 3: Atividade Prática 1, item c)

Com esses questionamentos, é esperado que os alunos relembrem conceitos básicos sobre a localização de pontos no plano cartesiano, sobre a orientação em relação aos quadrantes e como o sinal de cada coordenada do ponto interfere na sua localização, visto que, os pontos do 1° Quadrante tem sinal $(+,+)$; os pontos do 2° Quadrante tem sinal $(-\,,+)$; os do 3° Quadrante tem sinal $(-,-)$ e os pontos do 4° Quadrante, tem sinal $(+,-)$. Além disso, é de extrema importância que eles consigam diferenciar as situações em que os pontos estejam localizados sobre os eixos coordenados, de tal forma que não haja dúvidas sobre quando um ponto está sobre o eixo das abscissas ou quando um ponto se encontra sobre o eixo das ordenadas (atividade apresentada no item c).

Uma boa base teórica certamente provocará reflexos positivos no desenvolvimento de novos conceitos, especialmente no cálculo envolvendo a distância entre dois pontos que é nosso principal objetivo. Além disso, é essencial que o aluno não se preocupe apenas em decorar fórmulas e aplicá-las para resolver alguns "problemas", mas entenda os conceitos e compreenda toda a matemática que abrange cada situação apresentada, busque caminhos, desenvolva estratégias e tenha persistência diante de uma situação que pareça mais complicada. Segundo Polya (1995), resolver um problema é uma arte que compreende 4 fases: compreender o problema; estabelecer um plano para a sua resolução, executar esse plano e verificar a resposta. Logo, discussões sobre situações como a descrita na atividade prática 1, por mais simples que pareça, transforma o aluno em um ser mais crítico, ativo e mostra para ele mesmo que sua participação e envolvimento são essenciais para a sua aprendizagem. O professor deve agir como mediador e provocar no aluno o interesse pelo conteúdo, tornando-o participativo e mostrando sua verdadeira importância na construção de cada conceito.

Concluída essa etapa inicial de retomada de conceitos considerados essenciais para a continuação desse estudo, vamos para a atividade envolvendo o cálculo da distância entre dois pontos no plano.

Atividade Prática 2: a) No Geogebra, marque os pontos $A = (2,0)$ e $B = (6,0)$. Como você faria para calcular a distância entre esses dois pontos?

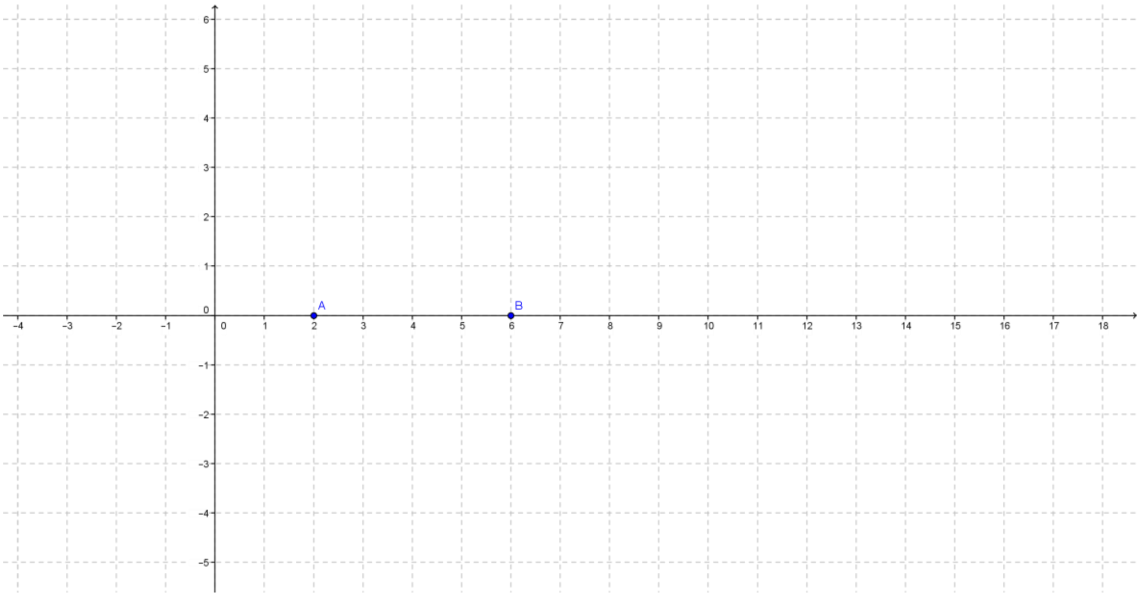

Figura 4: Atividade Prática 2, item a)

b) Identifique agora os pontos $C = (0,2)$ e $D = (0,4)$. Como você faria para calcular a distância entre esses dois pontos?

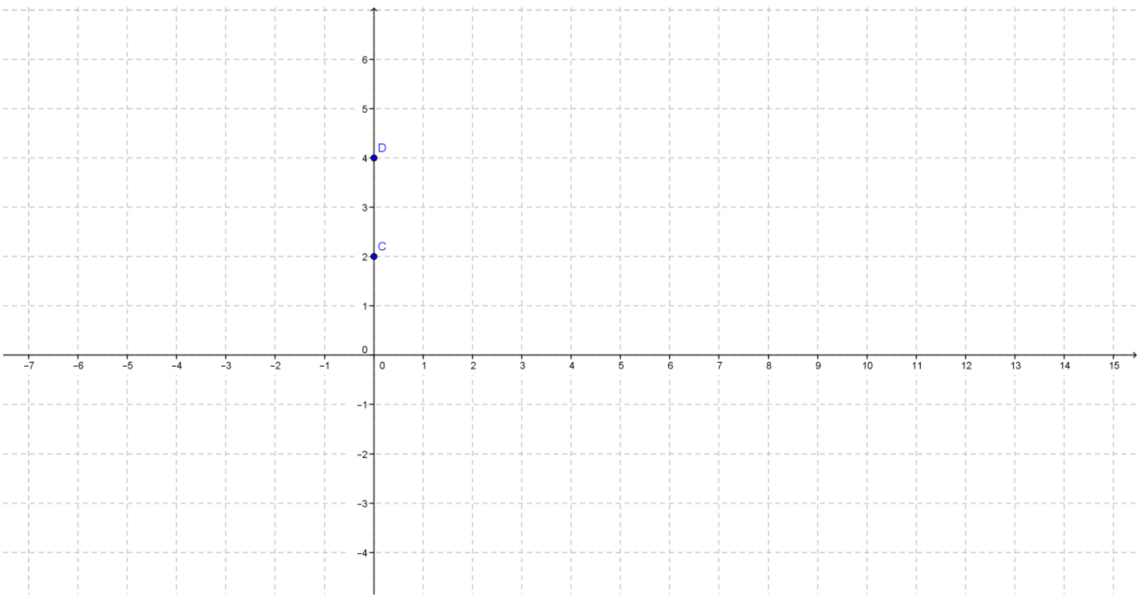

Figura 5: Atividade Prática 2, item b).

O principal objetivo dos itens a) e b) é fazer com que o aluno conclua que a distância entre dois pontos é o comprimento do menor segmento que une esses pontos. Para tanto, foram escolhidos dois segmentos que se encontram localizados sobre os eixos coordenados x e y, respectivamente. Tal estratégia visa facilitar a abstração dos alunos em relação ao conceito a ser abordado. Nesse tipo de situação, certamente o aluno utilizará como estratégia o cálculo da quantidade de intervalos presentes entre os dois pontos. Ele simplesmente irá "contar" esses intervalos. Fato este realizado por praticamente todos os alunos. Intuitivamente, ele está associando a ideia do cálculo da distância entre dois pontos com seu conceito matemático já definido.

c) Vamos agora identificar os pontos $E = (-4,0), F = (2,0), G = (0,5), H = (0,-3), I = (1,5), J = (-4,5), K = (-3,2), L = (-3,-4)$. Agora, determine a distância entre os pontos:

c1) E e F

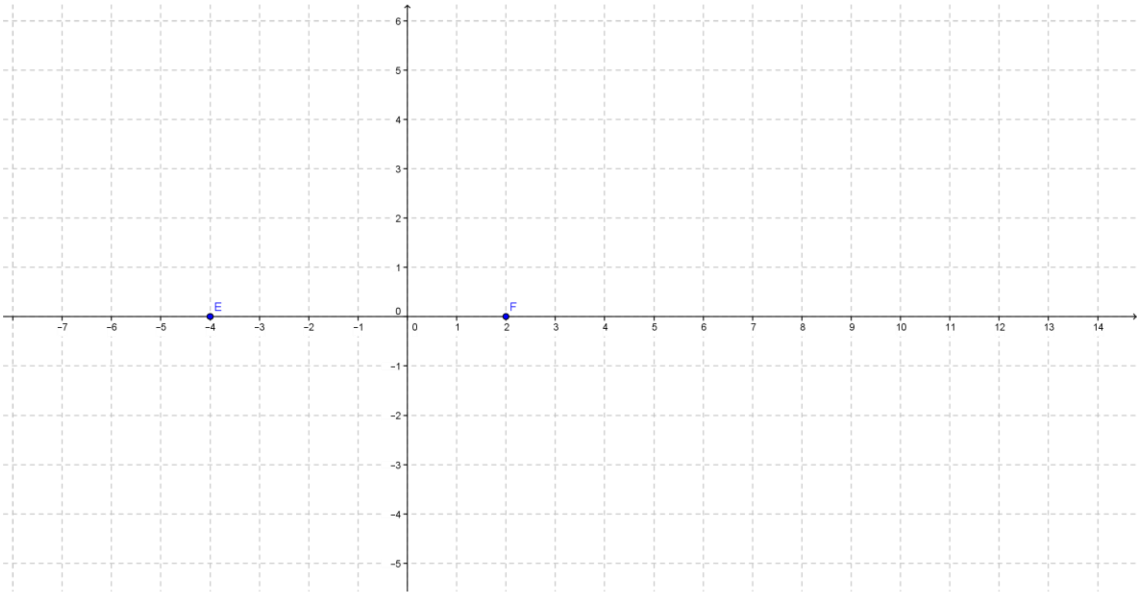

Figura 6: Atividade Prática 2, item c1)

c2) G e H

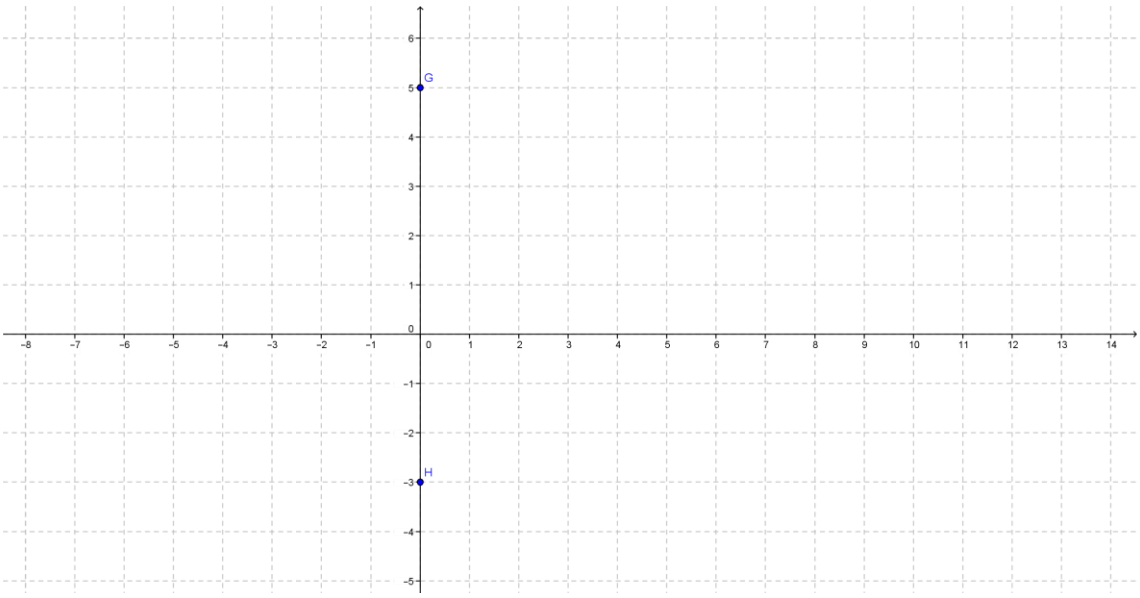

Figura 7: Atividade Prática 2, item c2)

c3) I e J

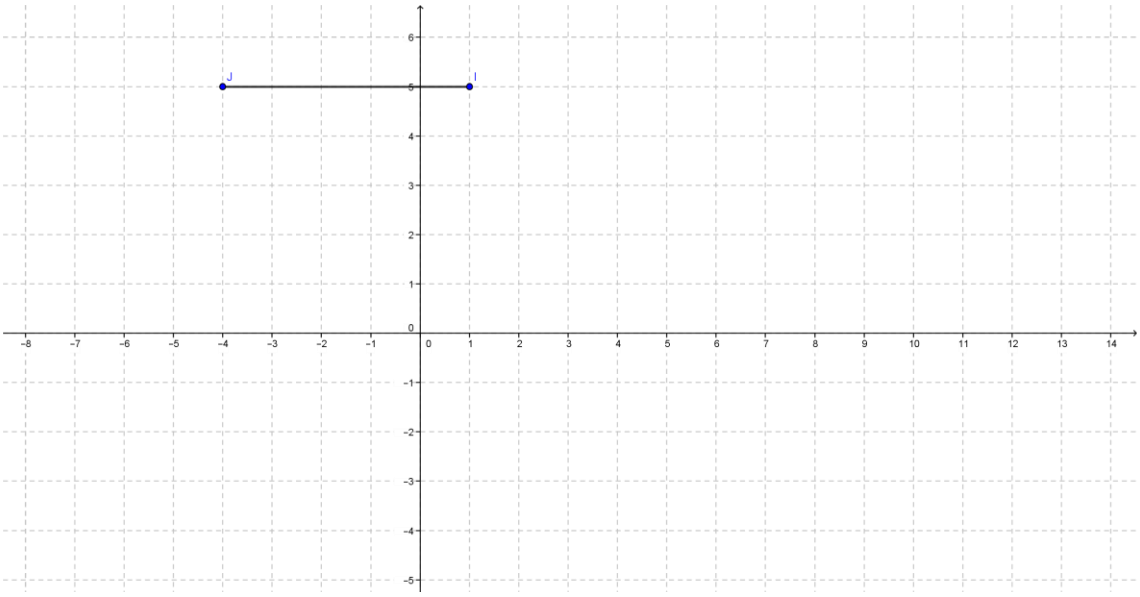

Figura 8: Atividade Prática 2, item c3).

c4) K e L

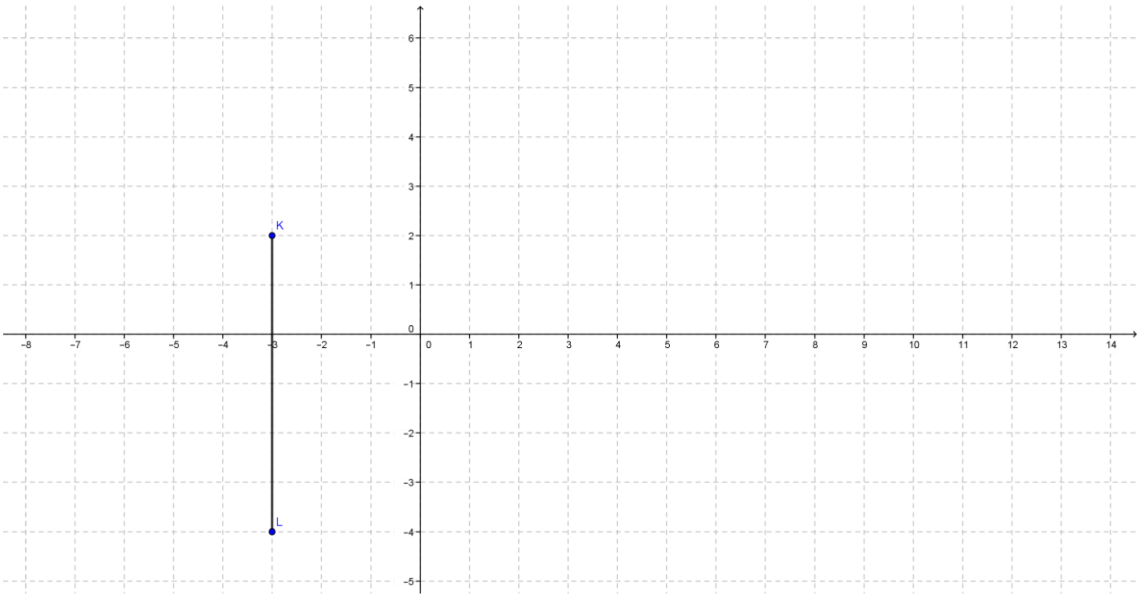

Figura 9: Atividade Prática 2, item c4).

Nos itens c1) e c2), temos duas situações semelhantes aos itens a) e b), porém com o segmento situado sobre os eixos coordenados e ultrapassando a origem (0,0). O estímulo utilizado pelo professor é o de fazer com que o aluno desenvolva alguma estratégia algébrica para encontrar o valor dessa distância, sem fazer uso do recurso que certamente foi utilizado nos itens a) e b), ou seja, "contar" intervalos, uma vez que o segmento encontra-se sobre um dos eixos coordenados. O professor pode orientá-los no sentido de mostrar que essa distância pode ser encontrada simplesmente com a subtração dos valores das coordenadas (em módulo). Com esse estímulo, o próximo passo é o de construir segmentos paralelos a um dos eixos coordenados, como é o caso dos itens c3) e c4). Nestes itens, temos dois segmentos formados pelos pontos I e J e também pelos pontos K e L, que são paralelos aos eixos x e y, respectivamente. Utilizando-se da estratégia já adotada anteriormente, o aluno é capaz de calcular o valor dessa distância sem muito esforço.

Uma vez compreendido que para se calcular a distância entre dois pontos no plano é necessário determinar o comprimento do segmento formado por esses dois pontos, então o aluno já tem condições de buscar caminhos para o cálculo dessa distância em outras situações ainda não previstas.

Atividade Prática 3:

3.1. Determine a distância entre os pontos $M = (2,1), N = (5,5)$.

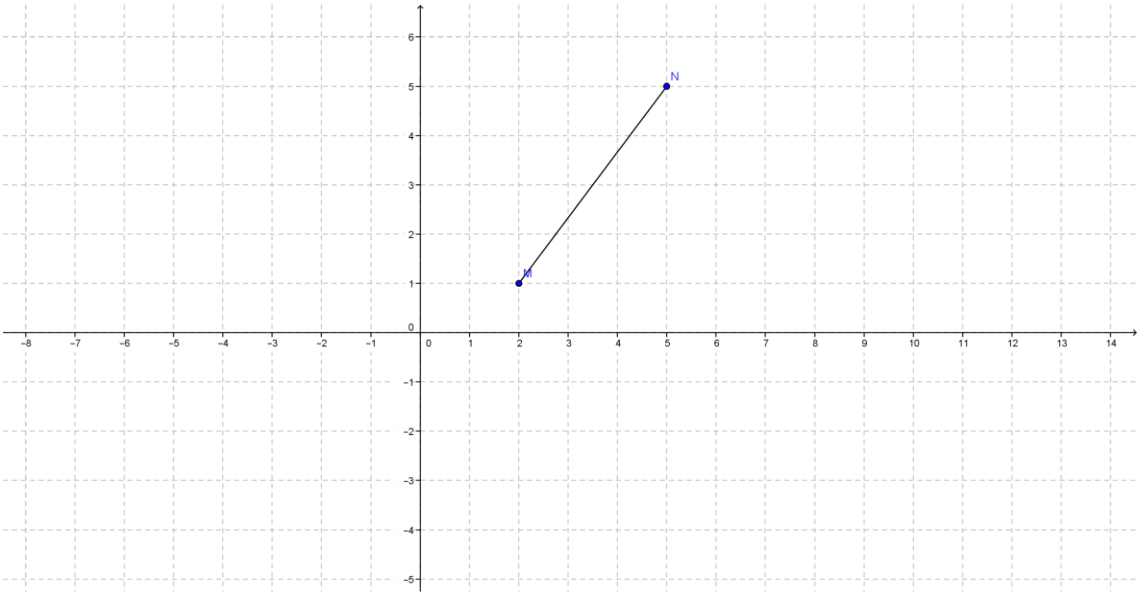

Figura 10: Atividade Prática 3.1

3.2. Determine a distância entre os pontos $P = (-4,6), Q = (5,3)$.

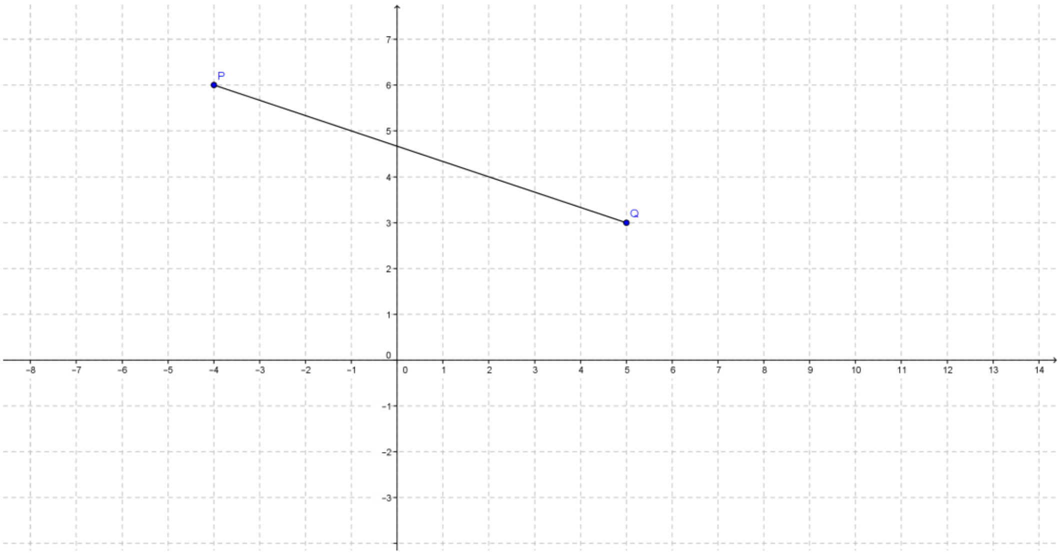

Figura 11: Atividade Prática 3.2

Tendo em vista tudo o que já foi apresentado até o momento, o aluno tem autonomia e capacidade para a construção da situação proposta no Geogebra. Com a construção geométrica ele terá capacidade para buscar “recursos” algébricos que resolvam essa situação. O objetivo é fazer com que o aluno conclua que a utilização do Teorema de Pitágoras é suficiente para resolver a situação apresentada. Espera-se que o aluno encontre a situação verificada na figura abaixo na atividade prática 3.1:

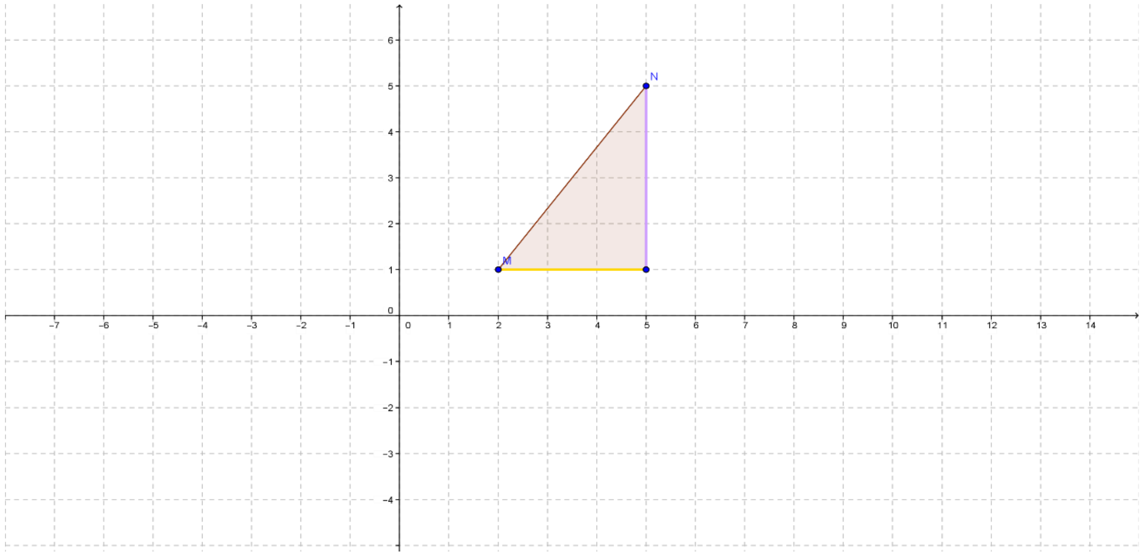

Figura 12: Estratégias para o cálculo da distância ente dois pontos no plano utilizando o Geogebra

Com a atividade prática 3, é esperado que o aluno verifique que podemos generalizar o cálculo envolvendo distância entre dois pontos no plano aplicando o Teorema de Pitágoras e que, esta conclusão é válida para todas as situações, incluindo aquelas que foram apresentadas na atividade prática 2. É dever do professor promover reflexões e discussões sobre as construções realizadas até o momento. É importante também salientar que até o presente momento não falamos ou discutimos sobre o uso de fórmulas para este cálculo, visto que, o objetivo principal era fazer com que o aluno chegasse as suas próprias conclusões a partir da realização de algumas situações propostas aliado às intervenções do professor, quando necessário.

Discutir e analisar todos os casos e possibilidades para a resolução de uma mesma situação é papel fundamental de todo educador. Precisa-se mediar as situações, apontando os aspectos positivos e negativos decorrentes de uma decisão que foi tomada e, sempre deixar explícito que recomeçar do zero também é uma estratégia.

Atividade Prática 4: Segue, como proposta, os seguintes problemas.

FICHA DE ATIVIDADES :

1 – Calcule a distância entre os pontos $A = (1, -2)$ e $B = (3, 4)$.
2 – Identifique os pontos $A = (1, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (3, 5)$ no plano cartesiano.
a) Qual é a distância entre os pontos A e B?
b) Qual é a distância entre os pontos A e C?
c) Qual é a distância entre os pontos B e C?
d) Como você classifica o triângulo ABC em relação ao comprimento dos lados?
3 – Em um plano cartesiano, os pontos $A = (-2, 3)$ e $B = (0, 5)$ são vértices consecutivos de um quadrado.
a-) Qual a medida do lado desse quadrado?
b-) Esboce no plano cartesiano esse quadrado.
4 – Considere os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Como podemos determinar a distância $d(A, B)$ em termos das coordenadas desses dois pontos?

É esperado que o aluno coloque em prática tudo aquilo que foi trabalhado ao longo de todas as atividades desenvolvidas até então. A atividade 1 busca corroborar o conceito de distância entre dois pontos. De forma simples, o aluno pode utilizar o Geogebra para localizar os pontos A e B e utilizar o Teorema de Pitágoras para determinar o valor dessa distância.

As atividades 2 e 3 ilustram problemas tradicionais de geometria plana que podem utilizar a distância entre dois pontos como base para a sua resolução. Novamente espera-se que o aluno utilize o Geogebra como ferramenta auxiliar para a resolução das duas situações destacadas.

Finalizando com a atividade 4 que busca uma generalização do conceito envolvendo a distância entre dois pontos no plano, sendo que, dados os pontos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ podemos determinar a distância $d(A, B)$ em termos das coordenadas desses dois pontos com o auxílio do Teorema de Pitágoras. Formando o Triângulo ABC, sendo $C = (x_2, y_1)$ temos que o segmento AC é paralelo ao eixo das abscissas e o segmento BC que é paralelo ao eixo das ordenadas. Portanto AB é a hipotenusa do triângulo ABC. Aplicando o Teorema de Pitágoras, temos que:

$d(A, B)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Logo: $d(A, B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

A dedução da fórmula aparece naturalmente, como uma consequência dos conceitos e ideias matemáticas abordadas até o momento.

Atividade Prática 5: Com o auxílio do Geogebra, resolva algebricamente os dois problemas abaixo:

5.1. Demonstrar que a soma dos quadrados das distâncias de um ponto qualquer $P(x. y)$ a dois vértices opostos de um retângulo é igual à soma dos quadrados de suas distâncias aos outros dois vértices. Tomar para os vértices, os pontos $(0,0), (0, b), (a, b), (a, 0)$.

5.2. Os vértices da base de um triângulo isósceles são os pontos $A = (-1,1)$ e $B = (-3,4)$. Qual a coordenada do terceiro vértice sabendo que ele pertence ao eixo das ordenadas?

Com a atividade prática 5 elevamos um pouco mais o nível de dificuldade das atividades apresentadas até o momento. É esperado novamente que o aluno utilize o Geogebra como facilitador, fazendo suposições e testando situações próximas ao valor esperado. O professor pode incentivar seus alunos na atividade 5.1, por exemplo, a substituir os valores a e b por números inteiros e verificar que a situação apresentada é realmente válida. A partir de experimentos com determinados valores, busca-se então uma generalização conforme é proposto na atividade. Já a atividade 5.2 é semelhante ao que foi apresentado no problema 2 da Atividade Prática 4. Embora as questões tenham direcionamentos diferentes, o professor pode propor essa associação objetivando despertar no aluno uma visão crítica dentro da resolução de problemas. Polya nos mostra que, ao resolvermos um problema, devemos sempre nos questionar se já nos deparamos em algum momento com um problema semelhante ou parecido com o problema que nos é apresentado.

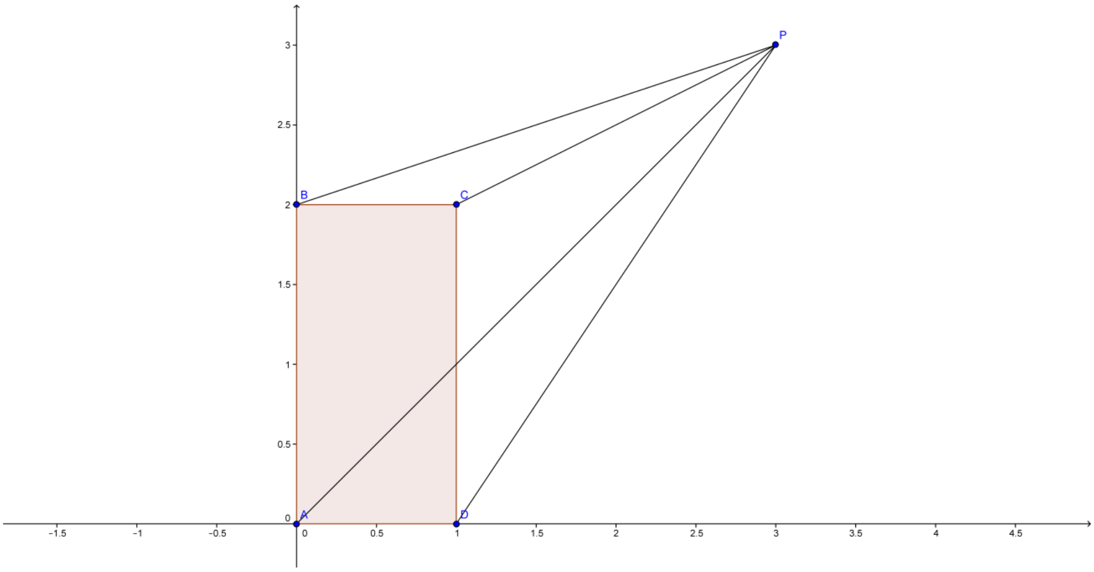

Figura 13: Atividade Prática 5.1. (construção para $a = 1$ e $b = 2$)

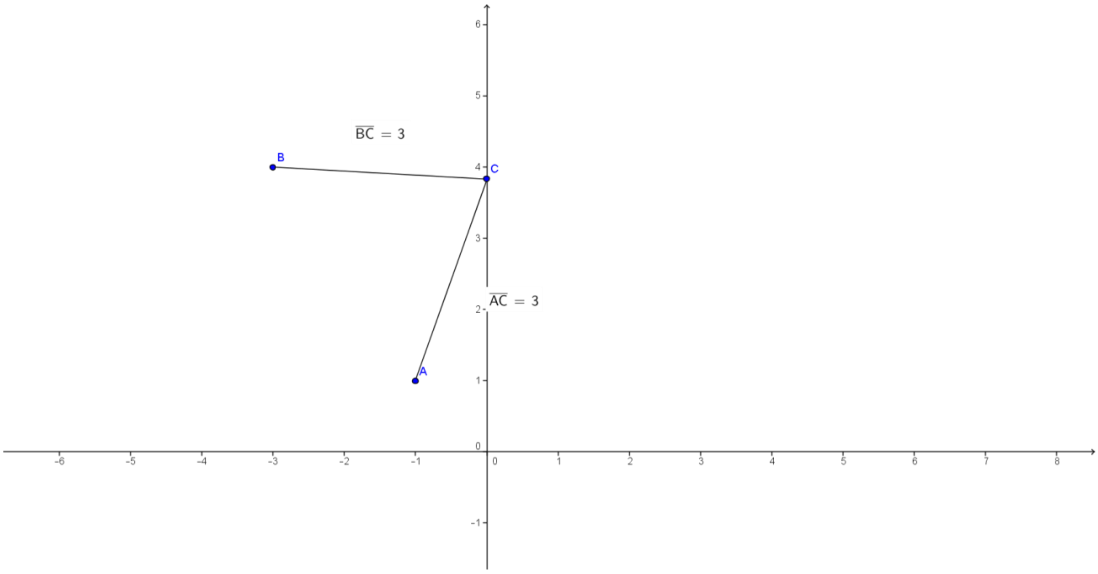

Figura 14: Atividade Prática 5.2.

3 Resultados

Este trabalho foi desenvolvido como parte integrante da disciplina de conclusão do Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional – PROFMAT.

Toda a proposta aqui apresentada e desenvolvida com o 3° ano do Ensino Médio mostrou que o processo de ensino e aprendizagem vai muito além de listas e mais listas de exercícios, da aplicação de números em fórmulas prontas e repetições que tornam-se vazias e sem nenhum sentido no que se refere ao aspecto pedagógico e na construção de uma aprendizagem real e significativa. Foi possível perceber que os conceitos apresentados foram pouco a pouco compreendidos. Desde a simples localização de pontos no plano cartesiano, identificando os sinais das coordenadas em relação aos quadrantes, passando pelo fato de conseguir identificar, sem nenhuma dúvida, os pontos localizados sobre os eixos x e y até uma análise um pouco mais criteriosa sobre o significado geométrico da distância envolvendo dois pontos no plano.

Intuitivamente os alunos perceberam que para se chegar ao cálculo da distância envolvendo dois pontos no plano, era preciso calcular o comprimento do segmento formado por esses dois pontos e que o Teorema de Pitágoras seria suficiente para realizar esse cálculo, independente da posição desse segmento em relação ao plano. Ficou evidente que a aprendizagem foi muito além de decorar uma fórmula, relativamente simples, porém que muitas vezes causa alguma confusão em relação aos sinais ou que simplesmente cai no esquecimento com o passar dos dias.

Muitos alunos utilizavam-se da geometria para resolver os problemas apresentados, principalmente quando estavam em dúvidas com relação à interpretação do que fora proposto. Logo, a participação e o envolvimento ao longo das atividades foi crescendo gradativamente, com questionamentos e inúmeras construções geométricas observadas ao longo de todo o processo. Nesse sentido, o Geogebra foi fundamental, visto que, o mesmo promove uma maior interação e envolvimento, deixando o aluno livre para criar e construir conceitos através de estímulos e intervenções pontuais.

Muitos alunos estavam sempre “recomeçando” quando algo não saía como o esperado, sempre motivados e cientes que eles eram protagonistas durante todo o processo. Nenhum conceito era colocado ou jogado para que eles simplesmente fizessem a leitura ou aplicassem na resolução de algum exercício. Tudo era construído a partir de atividades práticas e questionamentos ao longo das aulas, o que certamente, foi um elemento motivador e essencial para o desenvolvimento e o sucesso das atividades propostas.

Considerações finais

O trabalho de um educador, mais especificamente, de um educador matemático vai muito além da simples substituição de números em fórmulas prontas ou a repetição exaustiva de exercícios sem o mínimo fundamento. É preciso despertar no aluno o interesse e a curiosidade em conhecer diferentes assuntos e sentir-se cada dia mais motivado para que essa aprendizagem torne-se algo real e significativo. Atividades lúdicas, jogos e softwares tem se apresentado como ferramentas valiosas e com grandes resultados ao longo dos últimos anos.

Nesse sentido, a utilização do Geogebra teve papel fundamental como instrumento motivacional, na construção de conceitos e despertando no aluno um maior interesse em todo o processo de resolução de problemas.

O software mostrou aos alunos que eles podem ir muito além quando o assunto é Geometria Analítica, ajudando a analisar cada problema com um olhar mais crítico e na busca por diferentes caminhos para resolver um mesmo problema. É importante salientar que em nenhum momento deve-se deixar de lado a Álgebra, principalmente em problemas envolvendo Geometria Analítica, mas aliar álgebra e geometria é uma estratégia que pode colaborar imensamente na construção de conceitos e também na resolução de problemas.

Aliar a Álgebra com a Geometria através de uma ferramenta tecnológica, no caso o Geogebra, é um caminho que pode ser extremamente útil, principalmente no trabalho envolvendo a resolução de problemas.

Referências

BALDIN, Y. Y.; FURUYA, Y. K. S. **Geometria Analítica para todos e atividade com o Octave e o Geogebra**. São Carlos: EDUFSCAR, 2011.

DANTE, L. R. **Matemática:** contexto e aplicações. 3. ed. São Paulo: Ática, 2008.

GEOGEBRA. Versão 4.2. International Geogebra Institute. Disponível em: <http://www.geogebra.org>. Acesso em: 10 out. 2015.

GOMEZ, J. J. D.; FRENSEL, K. R.; CRISSAFF, L. S. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção PROFMAT).

LIMA, E. L. **Geometria Analítica e Álgebra Linear**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

______. **Problemas e soluções.** Rio de Janeiro: IMPA, 1992.

______.; CARVALHO, P. C.; FILHO, F. G. **Coordenadas no plano**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A Matemática no Ensino Médio**. Rio de Janeiro: SBM, 1998. V. 3

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. 2. ed. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

SÃO PAULO (Estado). **Currículo do Estado de São Paulo**. São Paulo: SEE, 2010.

TAO, T. **Como resolver problemas matemáticos:** uma perspectiva pessoal. Rio de Janeiro: SBM, 2013.