

# REFLEXÕES ACERCA DO USO DA APRENDIZAGEM BASEADA EM PROBLEMAS NO ENSINO DE CONCEITOS MATEMÁTICOS

## REFLECTIONS ON THE USE OF PROBLEM-BASED LEARNING IN TEACHING MATHEMATICAL CONCEPTS

Gisele de Gouvêa\*  
Rogério Ferreira da Fonseca\*\*

### RESUMO

No presente trabalho faremos considerações acerca de uma “nova” metodologia de ensino ativa, nos referimos a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). A palavra “nova” se refere à utilização desta metodologia no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Em geral, essa metodologia auxilia na articulação entre teoria e prática profissional, o que nos parece relevante também para o ensino e aprendizagem de matemática, perante os desafios impostos pela sociedade contemporânea, ou seja, uma sociedade que cada vez mais busca profissionais que atuem de forma crítica, criativa e participativa em sua área de atuação. Indicamos um problema exemplar, e as respectivas orientações didáticas, de acordo com os preceitos da metodologia de ensino aqui adotada.

**Palavras-chaves:** Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). Ensino e Aprendizagem. Conceitos Matemáticos. Resolução de Problema.

### ABSTRACT

In this work, we will make considerations about a "new" active teaching methodology, the Problem Based Learning (PBL). The word "new" refers to the use of this methodology in the teaching and learning of mathematical concepts. In general, this methodology helps in the complementarity in between theory and professional practice, which seems also relevant to the teaching and learning of mathematics, given the challenges posed by contemporary society, ie a society that increasingly search professionals who act so critical , creative and participatory in their area. We indicate an example of the problem and their teaching guidelines, according to the precepts of the teaching methodology adopted here.

**Keywords:** Problem-Based Learning (PBL). Teaching and Learning. Mathematical Concepts. Problem Solving.

---

\* Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (*Campus* São Paulo). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática. [gidegrau@hotmail.com](mailto:gidegrau@hotmail.com)

\*\* Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (*Campus* São Paulo). Doutor em Educação Matemática. [rffonseca@ifsp.edu.br](mailto:rffonseca@ifsp.edu.br)

## **Introdução**

No presente artigo, nos dedicaremos ao estudo de uma “nova” metodologia de ensino ativa, nos referimos a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL). A palavra “nova” se refere à utilização desta metodologia no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Nosso interesse por essa temática surgiu por meio do contato com algumas pesquisas que utilizam a Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) no ensino de Engenharia e Medicina, entre outros cursos (RIBEIRO, 2008; SCHMDT, 1994, 2006; ESCRIVÃO FILHO; RIBEIRO, 2009).

Em geral, essa metodologia auxilia na articulação entre teoria e prática profissional, o que nos parece relevante perante os desafios impostos pela sociedade contemporânea, ou seja, uma sociedade que cada vez mais busca profissionais que atuem de forma crítica, criativa e participativa em sua área de atuação.

Optamos por noções de Matemática devido aos resultados de pesquisas que apontam que os estudantes de graduação, em geral, têm dificuldades com essa disciplina, muitas vezes citando como obstáculos a formalização da linguagem Matemática, o caráter demasiadamente abstrato, e a percepção de poucas aplicações práticas (MACHADO, 2012; CHIARI, 2013; SANTOS, 2013; BARUFI, 1999; REZENDE, 2003; BASSANEZI, 2011).

Organizamos este texto da seguinte forma, no item 1 abordaremos a motivação, justificativa, objetivo, questões de pesquisa e a problemática. No item 2, apresentamos sucintamente os procedimentos metodológicos e as principais características da Aprendizagem Baseada em Problemas. No item 3 indicamos uma situação exemplar e sugestões para abordar determinados conceitos matemáticos por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas e, por fim, as considerações finais.

### **1 Motivações e objetivos**

A motivação para o desenvolvimento da pesquisa surgiu pelo fato de estarmos interessados em investigar potencialidades de uma metodologia ativa, em especial o PBL, no ensino de conceitos matemáticos, com o intuito de favorecer uma aprendizagem mais significativa, e mais próxima da realidade dos estudantes, de forma articulada com a futura prática profissional. Entendemos que a aprendizagem significativa é “uma incorporação de novos conhecimentos à estrutura cognitiva com significado,

compreensão, capacidade de explicar, transferir, enfrentar situações novas” (MOREIRA, 2013, p. 12).

Outro aspecto motivador está relacionado ao fato de que essa metodologia tem sido pouco explorada no ensino e aprendizagem de Matemática. As dificuldades e desafios envolvidos no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos, indicados em diversas pesquisas desenvolvidas no âmbito da Educação Matemática e as demandas impostas pela sociedade contemporânea, indicam a necessidade de explorar novas metodologias de ensino.

O objetivo de nossa pesquisa é explorar e analisar, do ponto de vista teórico, as potencialidades de se abordar conceitos matemáticos por meio da Aprendizagem Baseada em Problemas, ressaltando possíveis vantagens e desvantagens dessa metodologia de ensino. Buscamos responder as seguintes questões: Quais são as potencialidades teóricas da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos? E quais são os possíveis entraves ou obstáculos inerentes a essa metodologia?

Uma das principais características da Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) é explorar situações (problemas) reais ou realísticas (plausíveis de ocorrerem na prática profissional) no processo de ensino e aprendizagem, favorecendo o desenvolvimento de competências e habilidades essenciais para a futura atuação dos estudantes como profissionais e cidadãos.

Julgamos que buscar uma “nova” metodologia de ensino para abordar conceitos matemáticos é relevante, diante das demandas impostas pela sociedade contemporânea, onde se espera que as pessoas atuem de maneira ética, crítica e inovadora na resolução de problemas no seu âmbito profissional.

## **1.1 Problemática**

Articular os saberes disciplinares e os campos de atuação profissional é muitas vezes questionável no universo acadêmico por se tratar de um obstáculo a ser superado nos cursos de formação inicial.

Destacamos como agravante o fato de constatar que as disciplinas cursadas na graduação apresentam-se distantes do que é exigido para atuar profissionalmente (HUNGER; LEPRE, 2013), desta maneira o PBL pode auxiliar o enfrentamento desta situação.

A maioria dos professores e alunos universitários há tempos sabe desses e de outros problemas e desafios encontrados na busca da formação de um profissional que pense sobre e na prática e que, portanto, é preciso conceber os cursos de graduação de modo articulado às problemáticas, necessidades, exigências, inovações etc. do mundo do trabalho. (HUNGER; LEPRE, 2013, p. 1).

Associar o conhecimento científico ao saberes experienciais desde o início da formação está se tornando necessário, o ensino não pode ser tratado de forma fragmentada.

É desejável articular teoria e prática no ensino de Matemática, no sentido de proporcionar aos estudantes uma formação profissional mais próxima das situações que irão se deparar no mundo do trabalho: “Teoria e prática são conceitos distintos, mas que precisam ser pensados de forma indissociada, visando uma práxis transformadora e emancipadora” (HUNGER; LEPRE, 2013, p. 1).

Os argumentos anteriores ajudam a evidenciar nossa escolha por explorar a Aprendizagem Baseada em Problemas, para abordar conceitos matemáticos, devido esta metodologia possibilitar a articulação entre teoria e prática no cenário profissional de interesse dos estudantes.

É importante destacar que nossa sociedade precisa de profissionais que consigam atuar de forma inovadora em seu ambiente de trabalho, mas exigir isso requer uma formação que vá ao encontro dessas novas demandas impostas pela sociedade contemporânea.

## **2 Procedimentos Metodológicos**

Neste item apresentaremos resumidamente os procedimentos metodológicos utilizados no desenvolvimento da pesquisa e faremos comentários acerca da Aprendizagem Baseada em Problemas.

O estudo que estamos propondo trata-se de uma pesquisa exploratória de cunho bibliográfico. Este tipo de procedimento metodológico é adequado quando há pouco conhecimento sobre a temática a ser abordada, buscando conhecer com maior profundidade o assunto, de modo a torná-lo mais claro ou construir questões importantes para a condução da pesquisa.

Pesquisas exploratórias são desenvolvidas com o objetivo de proporcionar visão geral, de tipo aproximativo, acerca de determinado fato. Este tipo de pesquisa é realizado especialmente quando o tema

escolhido é pouco explorado e torna-se difícil sobre ele formular hipóteses precisas e operacionalizáveis (GIL, 2008, p. 27).

Já existe e está disponível um número considerável de publicações a respeito da Aprendizagem Baseada em Problemas e seu uso em diferentes áreas de conhecimento, como Medicina, Engenharia, Administração, Direito, entre outras (ARAÚJO; SASTRE, 2009). No entanto, há poucas pesquisas sobre o uso desta metodologia no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos (SOUZA, 2016).

De acordo com Gil (2008), a pesquisa exploratória constitui a primeira etapa de uma investigação mais ampla, apontando que o tema escolhido é genérico, tornando o esclarecimento e delimitação necessários, exigindo uma revisão de literatura, discussão com especialista e outros procedimentos.

## **2.1 Aprendizagem Baseada em Problemas**

Agora faremos comentários acerca de nossa escolha pela Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) como metodologia de ensino a ser explorada nesta pesquisa. De acordo com o que será apresentado a seguir observar-se-á que ela está relacionada com a futura prática profissional dos estudantes, por propor situações reais, tornando a aprendizagem mais próxima da formação profissional.

A Aprendizagem Baseada em Problemas (PBL) originou-se no Canadá na década de 60 e início de 1970, no âmbito universitário, mais precisamente na Faculdade de Medicina da Universidade de McMaster. Além da McMaster, outras Faculdades de Ciências da Saúde passaram a utilizar o PBL como base da estrutura curricular, de forma plena ou mesmo inicialmente, utilizando-a como um currículo paralelo, ou em parte da grade curricular. Destacam-se: Maastrichi University (Holanda), Southern Illinois School of Medicine (EUA), Faculté de Medicine- Université de Sherbrooke (Canadá) e Harvard Medical School (EUA).

Queiroz (2012) aponta que no Brasil o PBL já se tornou uma realidade educacional em diversas universidades e centros acadêmicos, por se tratar de uma metodologia ativa que vem ao encontro das necessidades de nossa sociedade contemporânea. A respeito do uso do PBL no Brasil, destacam-se as seguintes universidades: Universidade de São Paulo, na Escola de Artes, Ciências e Humanidades (EACH-USP Leste) e na Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade (FEA-USP Ribeirão Preto), por meio de um novo curso de MBA; a Universidade Federal de São Carlos (UFSCAR), em seus

cursos de Engenharia; a Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), nos cursos de Medicina e Engenharia Biomédica; dentre outras.

A Aprendizagem Baseada em Problemas se insere em um modelo educacional de ensino superior, propiciando aos estudantes a oportunidade de serem ativos, participativos e responsáveis por seus conhecimentos, durante todo o processo que os inserem. Procura também garantir que a realidade seja confrontada, levando os estudantes, por meio de problemas, a analisarem as situações propostas como pessoas comprometidas com a realidade social, em busca de soluções para a vida, aliando teoria e prática e rompendo com os modelos tradicionais de ensino (pautado em definições, exemplos e exercícios).

Destaca-se que no PBL o aluno é o agente ativo em busca da resolução de problemas, as soluções em si não é o que lhes apontam à aprendizagem, mas o processo de pesquisa, este sim, constitui-se o verdadeiro fenômeno da aprendizagem. Além disso, os estudantes são autorizados, requisitados e estimulados a falarem em classe.

Apresentamos aqui alguns aspectos fundamentais do que entendemos por Aprendizagem Baseada em Problemas, com intuito de mostrar os motivos que levaram nossa escolha por esta metodologia de ensino.

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o professor/tutor tem um papel importante, que é permitir que os estudantes se apropriem do problema de forma independente e autônoma. Essa metodologia requer um esforço dos professores no sentido de propiciar modelos (problemas) e cenários de ensino que permitam o trabalho e a aprendizagem em níveis adequados de complexidade e relevância.

É imprescindível, portanto, a formação de um docente prático-reflexivo, dotado de conhecimentos, habilidades e, principalmente, disposto a refletir sobre sua prática. O professor deve sempre avaliar seu trabalho, verificando se a sua proposta metodológica está adequada à realidade, se a relação professor-aluno é frutífera e favorece a aprendizagem significativa.

Esta atitude interdisciplinar do professor deve ser construída pelo autoconhecimento inicial, no exercício da reflexão sobre sua prática educativa, na procura do significado para sua própria vida e de seus alunos, tornando-o um processo contínuo de construção de novo saberes e não abandonando suas práticas coerentes, mas atualizando-as e compartilhando-as com seus parceiros (GEMIGNANI, 2012, p. 11).

Nossa intenção aqui é apenas sugerir caminhos a serem percorridos ou propostos pelo tutor, assim as sugestões não devem ser entendidas como uma receita, e sim como uma alternativa que pode ser integralmente ou parcialmente seguida. O tutor tem

autonomia para propor um caminho mais adequado para sua turma, levando em consideração os conceitos a serem aprendidos na consultoria e no curso.

### **3 Uma situação exemplar**

Indicaremos agora uma situação exemplar de problema que atende aos preceitos do PBL, vamos explorar algumas possibilidades de resolução destacando conceitos matemáticos que poderiam ser abordados, por meio deles, assim como outros aspectos relevantes para a aprendizagem e também para a dinâmica de trabalho com o PBL.

#### **Orientações Gerais**

As orientações feitas neste item são gerais e versam sobre uma sugestão de dinâmica de acordo com os preceitos do PBL, por seu aspecto mais geral também serve para as diferentes sugestões de encaminhamentos (tratamento matemático e sugestão de abordagens de conceitos matemáticos) que apresentaremos na sequência.

Inicialmente será fundamental que o tutor (professor) ressalte os principais aspectos envolvendo a dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, promovendo a conscientização a respeito dos objetivos da metodologia e do trabalho a ser feito na busca da solução (ou encaminhamento da resolução) do problema proposto. Todos os envolvidos precisam entender que o processo se dá por meio de tutorias e possíveis consultorias, as quais substituem as aulas convencionais, favorecendo um ambiente mais dinâmico e interativo.

Na dinâmica da Aprendizagem Baseada em Problemas, os estudantes deverão ser organizados em pequenos grupos, em torno de quatro ou cinco pessoas, e o professor assume a postura de tutor ou facilitador da aprendizagem.

O problema será apresentado aos grupos antes dos conceitos matemáticos que serão explorados. Cada grupo deverá eleger desde o início um coordenador e um relator (ou secretário). O coordenador tem a responsabilidade de conduzir as conversas em grupo, ou seja, deverá atuar como líder da equipe. O relator deverá registrar os pontos mais importantes das reuniões, além de registrar a indicação das tarefas de cada membro do grupo. Aconselha-se que exista rotatividade de papéis entre os participantes do grupo, buscando o desenvolvimento de atitudes e comportamentos essenciais às atuações profissionais.

As sessões tutoriais devem respeitar aspectos gerais, como: a análise do problema e o planejamento da pesquisa; o desenvolvimento das ações que levarão à resolução do problema; a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

Em relação à análise do problema e planejamento da pesquisa, destacamos a apresentação geral a respeito do problema proposto. Objetiva-se ressaltar possíveis relações da situação proposta com as futuras realidades profissionais dos estudantes, isso se dá por meio da leitura coletiva do problema, apresentação do contexto e registro de possíveis palavras ou termos desconhecidos, esses deverão ser pesquisados posteriormente. O interesse pelo problema deve ser despertado e os grupos tendem a perceber que há lacunas em seus conhecimentos, logo, faz-se necessária a realização de pesquisas acerca do assunto abordado.

A partir daí os estudantes deverão iniciar um planejamento para buscar informações acerca do problema, organizar ações e meios para trocas de experiências entre os membros da equipe. Nesta etapa, será fundamental a elaboração de hipóteses e definições das estratégias para resolver o problema, considerando o tempo disponível para executá-las, esse tempo depende da carga horária da disciplina e do planejamento do tutor (professor). Pode-se sugerir também que os grupos elaborem um projeto de pesquisa, de acordo com os objetivos do tutor.

Na etapa que envolve as ações que levarão à resolução do problema deverão ocorrer estudos, pesquisas e intervenções, contando com possíveis consultorias de outros profissionais (ou professores de outras áreas do conhecimento).

Na Aprendizagem Baseada em Problemas, o plano de aulas dificilmente se restringe a um único momento, pois após o primeiro contato com o problema surgirão conjecturas e alguns planos de ação, os discentes precisam se reencontrar a fim de apresentar e discutir tudo o que foi desenvolvido ou pesquisado (durante um determinado período). Nos encontros intermediários os grupos falam sobre suas descobertas e, com embasamentos teóricos, compartilham suas informações com os outros membros da equipe.

O tutor analisará as interpretações dos estudantes e poderá indicar encaminhamentos a respeito do trabalho com conceitos envolvidos, mesmo que englobe outras áreas de conhecimento. Entretanto o tutor precisará analisar se as decisões adotadas pelos estudantes levarão à construção de conhecimentos relevantes. Previsões e análises das dificuldades também devem ser mapeadas pelo tutor, tanto em relação aos conhecimentos gerais como ao comportamento que cada grupo possa apresentar.

Reiteramos que cada um desses apontamentos, analisados de modo processual, pretendem diagnosticar a aquisição de conhecimentos transdisciplinares e, precisam, assim, ser bem estruturados.

Na última etapa da dinâmica envolvendo a Aprendizagem Baseada em Problemas deverá ocorrer a socialização dos conhecimentos produzidos e a produção de relatórios.

A socialização ocorrerá por meio do compartilhamento dos conhecimentos produzidos, com os demais grupos e com o tutor. Propõe-se a apresentação de um relatório no qual conste a trajetória do projeto desenvolvido, as pesquisas realizadas e os resultados obtidos, inclusive a indicações de conhecimentos adquiridos. Nessa etapa as soluções podem ser apresentadas aos demais membros da sala e recomenda-se a validação das mesmas, a partir dos conhecimentos adquiridos. Momento este em que há abertura para a exposição das ideias e troca de experiências com os outros grupos.

Em relação aos processos de avaliação das sessões, ressalta-se que eles podem ter caráter tanto processual quanto formativo. Pode-se considerar na avaliação: a produção e a análise dos relatórios; os aspectos pertinentes à autoavaliação; a avaliação individual dos membros da equipe; a apropriação dos conceitos estudados; dentre outros aspectos.

Os conhecimentos adquiridos são indicados pelos próprios estudantes. O tutor ao longo do processo deverá identificar se os novos conhecimentos realmente estão sendo construídos, isto é, verificar se os métodos de resolução e os conceitos matemáticos abordados estão sendo apreendidos significativamente, inclusive quanto à formalização de conceitos. A ideia é que esses estudantes notem o quanto a apreensão do problema pode colaborar para o desenvolvimento de suas competências conceituais, atitudinais e profissionais.

Além das orientações gerais indicadas nos parágrafos anteriores, o tutor poderá discutir aspectos relacionados aos modelos matemáticos e suas aplicações em diversas áreas do conhecimento, essa discussão será fundamental para os encaminhamentos que sugerimos no próximo item.

É importante destacar, por exemplo, que os modelos matemáticos ajudam a fazer estimativas ou previsões, no entanto, eles geralmente não representam literalmente os fenômenos modelados, ou seja, eles não traduzem a pura realidade, mas sim fazem aproximações, e tem suas limitações em relação aos fenômenos estudados. “Todo modelo teórico é parcial e aproximativo: não apreende senão uma parcela das particularidades do objeto representado” (BUNGE, 2008, p. 30).

Assim como afirma Stewart (2015, p. 22), entendemos que “um modelo matemático é uma descrição matemática (frequentemente por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real [...]”.

Ao modelar um fenômeno do mundo real, temos como propósito entendê-lo, e quiçá fazer previsões sobre seu comportamento futuro. Stewart (2015, p. 22) ressalta que:

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física - é uma *idealização*. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, precisão suficiente para conclusões significativas. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza.

Na sequência apresentaremos algumas sugestões de tratamento matemático, explorando diferentes conceitos. Não temos a pretensão aqui de sugerir que esses sejam os melhores ou os mais adequados para resolver os problemas propostos, já que são possíveis várias outras abordagens matemáticas, dependendo das escolhas do tutor e dos objetivos de cada curso. Buscaremos apenas ilustrar a potencialidade da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino de noções matemáticas.

## Microcefalia<sup>1</sup>

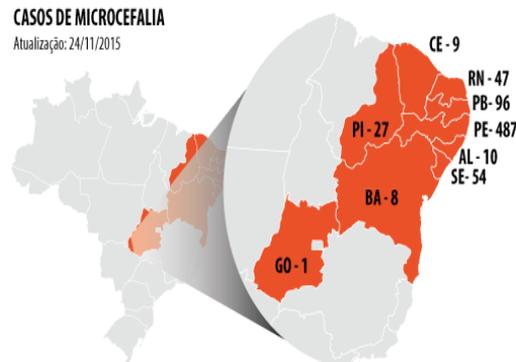


Figura - Casos de Microcefalia por Região

Fonte: <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia>

## O que é a Microcefalia?

Microcefalia é o nome que se dá quando uma criança tem a cabeça menor do que o considerado padrão. Não é exatamente uma doença, e sim um sinal de que o cérebro pode não estar crescendo como deveria.

<sup>1</sup> Texto sobre a Microcefalia retirado de <http://portalsaude.saude.gov.br/index.php/cidadao/orientacao-e-prevencao/xyz-microcefalia> pesquisado em 15 de julho de 2016.

É o crescimento do cérebro que faz o crânio crescer. Se o cérebro realmente não se desenvolve, a criança pode vir a ter deficiência intelectual e física, em variados graus. Mas é possível uma criança ter microcefalia e não ter atrasos.

É importante lembrar que o cérebro é um órgão ainda bastante misterioso e surpreendente, e são muitos os casos de problemas cerebrais em que as crianças se desenvolveram muito melhor do que previam os médicos. Como a microcefalia é diagnosticada?

Ainda no útero, a microcefalia pode ser diagnosticada quando a medida da cabeça (perímetro cefálico) do feto, quando comparada com outras medidas, e com a idade gestacional, fica abaixo do esperado.

É importante considerar que a medição pode não ser exata, porque depende da habilidade do profissional, da posição do bebê e da qualidade do equipamento. Quando o bebê nasce à microcefalia é diagnosticada com uma simples fita métrica.

As autoridades brasileiras estão determinando, para efeito de monitoramento, que serão considerados casos suspeitos de microcefalia recém-nascidos (desde que nascidos depois de 37 semanas) com perímetro cefálico de menos de 32cm.

Apenas a medida não é suficiente para determinar se há má formação. É preciso levar em conta também: (a) A circunferência cefálica dos pais (se os pais também tiverem a cabeça pequena, pode ser apenas uma característica hereditária); (b) O fato de o bebê ter nascido de parto normal. É recomendável repetir a medida do perímetro cefálico três ou quatro dias depois do parto, porque a cabeça do bebê tem a capacidade de "afinar" para passa pelo canal do parto, e demora alguns dias para voltar ao normal; (c) As proporções do corpo da criança. Uma criança de estrutura pequena tende a ter uma cabeça menor.

Diante dos fatos expostos a respeito da microcefalia, e de possíveis informações complementares, responda: Quais serão os impactos do aumento considerável de diagnósticos de microcefalia nas políticas públicas nos próximos anos? E nas próximas décadas? Quais são as ações dos órgãos públicos em relação a essa nova realidade? É possível a partir de um modelo matemático afirmar ou suspeitar do diagnóstico de microcefalia? Justifique sua resposta à questão anterior utilizando argumentos matemáticos.

### **3.1 Sugestões de tratamento matemático e orientações**

## Transformação Linear<sup>2</sup>

Uma diretriz para o encaminhamento do problema 1 pode ser o estudo da lei do crescimento, considerando que desde o nascimento até atingir a idade adulta, diferentes partes do corpo crescem, cada uma com um fator de escala diferente.

Vamos considerar a relação, tamanho da cabeça (t), por altura do corpo (a). Utilizaremos como critério para a lei do crescimento o delineamento de uma razão entre essas duas grandezas (representado por  $r = t/a$ ).

Observe o quadro que mostra a razão do tamanho da cabeça pela altura do corpo de uma pessoa durante sua vida. Complete a coluna “Tamanho da Cabeça (t) (cm)”.

Quadro 1 - Dados de uma pessoa

Idade (anos)	Altura do corpo (a) (cm)	Tamanho da Cabeça (t) (cm)	Razão (r)
0	50	11	0,22
1	70	15	0,21
2	79	17	0,22
3	86	18	0,21
5	99	19	0,19
10	127	21	0,17
20	151	22	0,15

**Fonte:** Quadro adaptado de Nunes (2006)

O fenômeno do crescimento não é proporcional, ou seja, as grandezas envolvidas não são diretamente proporcionais, é possível compará-lo com a geometria fractal, que recebe o nome de lei de potência.

A lei de potência consiste em considerarmos os dados em largas escalas numéricas  $x$  e  $y$ , então é possível que exista uma lei de potência que exprima  $y$  em termos de  $x$ . Considerando 10 como base do logaritmo, mas poderia ser qualquer outra.

$$\log y = m \log x + b \Leftrightarrow 10^{\log y} = 10^{\log x^m} * 10^b \Leftrightarrow y = x^m * 10^b \Leftrightarrow y = cx^m, c = 10^b$$

Destacamos que,  $m$  é o declive da reta e  $b$  é a ordenada na origem. Esta equação descreve a lei de potência  $y$  em função de  $x$ , em que  $x$  é uma potência cujo expoente é o declive da reta.

<sup>2</sup> Esse Estudo de Apoio foi adaptado de NUNES (2006) - INTITULADO: Geometria Fractal e Aplicações. Departamento de Matemática Pura Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Janeiro/2006.

Vamos mostrar como o procedimento acima apresentado pode ajudar a encaminhar a resolução do problema, para isso utilizaremos como modelo matemático  $y = cx^m$ ,  $m = 1$  e  $b = 0$ , o modelo será reduzido a  $y = cx$ ,  $c$  é uma constante. Para adaptar o modelo matemático aos dados da tabela acima, utilizaremos como parâmetro a altura do corpo em cm e o tamanho da cabeça também em cm, mesmo o modelo sendo uma função linear vale destacarmos que dependendo dos valores que iremos atribuir para as grandezas  $x$  e  $y$  pode haver uma pequena discrepância entre as funções lineares encontradas pelos estudantes, caberá ao tutor alertá-los sobre isso, afinal estamos trabalhando com valores reais. Para sabermos o valor da constante  $c$  na equação  $y = cx$  temos:

Quadro 2 - Altura/ tamanho da Cabeça

Altura do corpo (a) (cm) x	Tamanho da Cabeça (t) (cm) Y
50	11
70	15
79	17
86	18

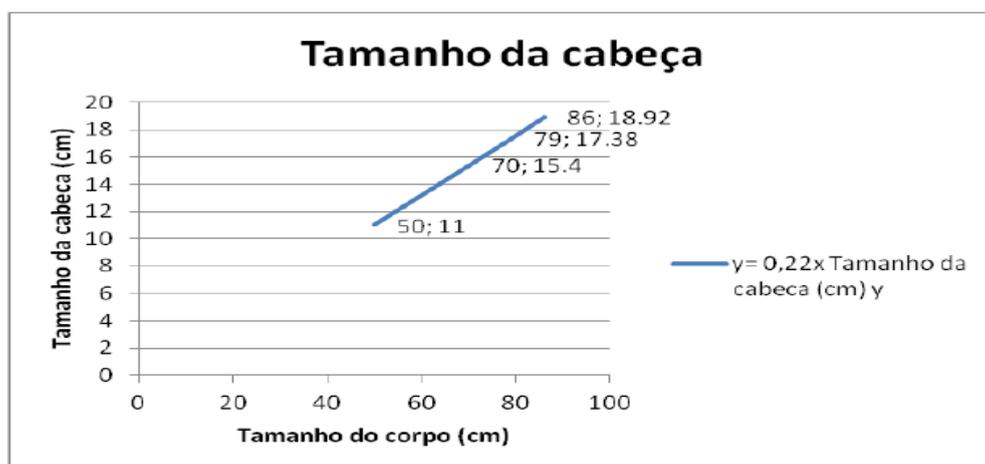
**Fonte:** Elaborado pelo autor

Para encontrar o valor de  $c$ , iremos pegar os valores  $x = 50$  e  $y = 11$ :  $y = cx$ ;  $11 = 50c$ ;  $c = 11/50$ ;  $c = 0,22$ . Assim o modelo será  $y = 0,22x$ , com isso apresentaremos o gráfico do modelo acima definido:

Quadro 3 - Altura do Corpo / tamanho da Cabeça

Altura do Corpo (cm) x	Tamanho da cabeça (cm) y
50	11
70	15,4
79	17,38
86	18,92

**Fonte:** Quadro elaborado pelo autor



Mais especificamente no problema proposto, além de aspectos relacionados à Matemática, também poderão ser exploradas questões relacionadas a área de Medicina, com problemáticas a respeito de saúde pública e políticas públicas, entre outras.

O tutor ainda poderá apontar questionamentos como: Qual a relevância desse tipo de problema para o poder público? Quais conhecimentos podem estar envolvidos nele? Quais ligações este problema apresenta com o futuro campo de atuação profissional dos estudantes?

Será fundamental que o tutor faça a sugestão do tratamento matemático do problema, caso os estudantes não vislumbrem essa possibilidade. Nesse caso poderão ser propostas as seguintes questões: Será possível desenvolver um modelo matemático para expressar um possível diagnóstico da Microcefalia?

O problema apresentado poderá envolver noções de Transformações Lineares. Conforme o direcionamento do estudo de apoio. Como sugestão de trabalho, o tutor poderá propor referências bibliográficas a respeito do assunto; incentivar as relações de ajuda mútua para compreender conceitos matemáticos; fornecer outros materiais de estudo complementares; disponibilizar espaços para que os estudantes aprofundem seus conhecimentos (bibliotecas, sala de monitoria ou consultoria, plantão de dúvidas), entre outras formas de estudo.

O tutor deverá escolher o melhor momento para realizar institucionalização conceitual das transformações lineares, com base no estudo de apoio para o problema 1, entretanto esclarecemos que tal momento deverá ocorrer após os estudantes iniciarem a pesquisa para encontrar possíveis soluções para o problema e terem contato com as noções matemáticas envolvidas.

Outro aspecto importante que deverá ser discutido na institucionalização é a formalização do estudo das Transformações Lineares. Caso os diferentes modelos obtidos pelos estudantes não sejam Transformações Lineares, o tutor (professor) deverá mostrar aos estudantes quais propriedades não são satisfeitas, indicando ainda possíveis vantagens ou desvantagens em utilizar uma Transformação Linear para modelar o problema proposto.

Indicamos que com a solução acima, o tutor pode trabalhar com os seguintes objetos matemáticos: função, função linear, logaritmos e transformações lineares, entre outros.

### 3.2 Segunda sugestão de tratamento matemático e orientações

Abaixo propomos uma resolução para o problema utilizando a regressão linear, ou seja, determinando um modelo matemático linear. Cabe ao tutor fazer adaptações de acordo com os objetivos e especificidades de cada turma ou curso, pois o problema permite explorar uma quantidade considerável de conceitos matemáticos e também de outras áreas.

#### Regressão Linear

Outra possibilidade de encaminhamento para a solução do problema é a utilização da regressão linear, que consiste em determinar um modelo linear para o problema da microcefalia, em seguida destacaremos alguns conceitos matemáticos que podem ser abordados por meio deste procedimento.

Quadro 4: Idade/Tamanho da Cabeça

	IDADE (x) anos	TAMANHO DA CABEÇA (cm) (y)	x.y	X <sup>2</sup>
	0	11	0	0
	1	14,7	14,7	1
	2	17,4	34,8	4
	3	18	54	9
	5	18,8	94	25
	10	21,6	216	100
	20	22,6	452	400
Σ	41	124,1	865,5	539

**Fonte:** Tabela elaborada pelo autor

Pretendemos encontrar um modelo na forma  $y = ax + b$ , para encontrarmos os coeficientes a e b, temos:

$$a = \frac{n \cdot \sum x \cdot y - (\sum x) \cdot (\sum y)}{n \cdot \sum x^2 - (\sum x)^2}$$

$$a = \frac{7 \cdot 865,5 - 41 \cdot 124,1}{7 \cdot 539 - (41)^2}$$

$$a = \frac{6058,5 - 5088,1}{3773 - 1681} = \frac{970,4}{2092} = 0,5$$

$$a = 0,5$$

$$b = y - a \cdot x; y = \frac{\sum y}{n} = \frac{124,1}{7} = 17,7$$

$$y = 17,7; x = \frac{41}{7} = 5,8 \quad x = 5,8$$

$$b = 17,7 - 5,8 \cdot 0,5 \quad b = 17,7 - 2,9 = 14,8$$

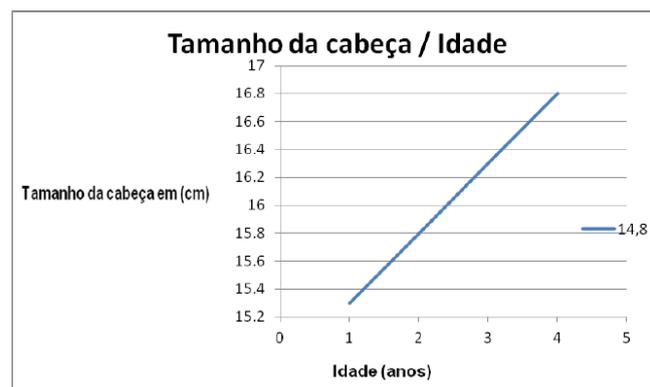
$$y = 0,5x + 14,8$$

Iremos construir o gráfico da função  $y = 0,5x + 14,8$  para isso, temos:

Quadro 5 - Idade/Tamanho da Cabeça

Idade (anos)	Tamanho da cabeça (cm)
0	14,8
1	15,3
2	15,8
3	16,3
4	16,8

Fonte: Quadro elaborada pelo autora



Alguns conceitos matemáticos que podem ser explorado se os estudantes optarem por esta resolução: função afim e suas representações; média, regressão linear.

### 3.3 Terceira sugestão de tratamento matemático e orientações

Nesta sugestão de encaminhamento os conceitos matemáticos que serão explorados incluem o ensino de função exponencial, crescimento e decrescimento exponencial, taxa de variação, estudos de logaritmos e suas propriedades. Os conhecimentos prévios englobam a potenciação e suas propriedades, função linear e a construção do gráfico, leitura de dados em uma tabela, reconhecimento de grandezas inversamente proporcional.

## Função Exponencial

Iremos propor a resolução utilizando o conceito de função exponencial, lembramos que  $y = a^x$  é o modelo de uma função exponencial, mas para o nosso problema teremos que obter uma constante de acerto para o problema estudado, assim temos:  $y = c \cdot a^x$ , basta tomar  $x = 0$  e  $y = 11$ ;  $11 = c \cdot a^0$ ,  $c = 11$ .

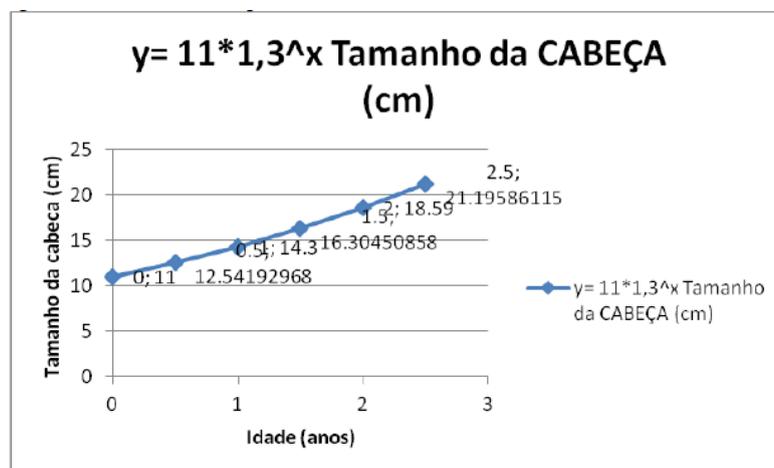
Agora iremos utilizar os pontos  $x=1$  e  $y=14,7$ , para descobrir o valor de  $a$   
 $14,7 = 11 \cdot a^1$ ;  $a = \frac{14,7}{11} a = 1,3$ ;  $y = 11 \cdot 1,3^x$ .

Quadro 7 - Idade/Tamanho da Cabeça

IDADE	TAMANHO DA CABEÇA (cm)
0	11
0,5	12,54192968
1	14,3
1,5	16,30450858

Fonte: Quadro elaborado pelo autor

Agora apresentaremos o gráfico:



### 3.4 Quarta sugestão de tratamento matemático e orientações

Neste estudo o tutor e os estudantes poderão explorar o método dos mínimos quadrados aplicado ao ajuste de curvas. Entre os conhecimentos prévios, destacam-se: interpretar e analisar dados por meio de tabelas e noções a respeito de função.

Neste caso o tutor pode tanto iniciar ou aprofundar o estudo de conceitos matemáticos como: matrizes, operações e propriedades, tipos de matrizes (quadrada,

transposta, matriz linha e coluna, identidade); sistemas lineares, classificação, discussão e diferentes métodos de resolução de sistemas lineares.

### Método dos mínimos quadrados aplicado ao ajuste de curvas

O ajuste de curvas pelo método dos Mínimos Quadrados tem muitas aplicações, dentre elas, é determinar qual é a função que melhor expressa o tamanho da circunferência cefálica de uma pessoa conhecendo sua idade (em anos).

A tabela abaixo mostra a idade em anos, e o tamanho da cabeça em centímetros (cm):

Quadro 7 - Idade/Tamanho da Cabeça

IDADE (ANOS)	TAMANHO DA CABEÇA (CM)
0	11
1	14,7
2	17,4
3	18

Fonte: Quadro elaborada pelo autor

Pretendemos reduzir este a problema a uma função do tipo:  $y(x) = \alpha + \beta x$ . Neste caso, iremos encontrar os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  de acordo com os dados da tabela acima, vamos escrever os dados na forma matricial, assim temos:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}; y = \begin{pmatrix} 11 \\ 14,7 \\ 17,4 \\ 18 \end{pmatrix}$$

Vale ressaltar que  $A^t$  é denominada como matriz transposta de  $A$ . Assim temos:

$$A^t A = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 14 \end{pmatrix}; A^t y = \begin{pmatrix} 61,1 \\ 103,5 \end{pmatrix}$$

Montaremos um sistema com as incógnitas  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\begin{cases} 4\alpha + 6\beta = 61,1 \\ 6\alpha + 14\beta = 103,5 \end{cases}$$

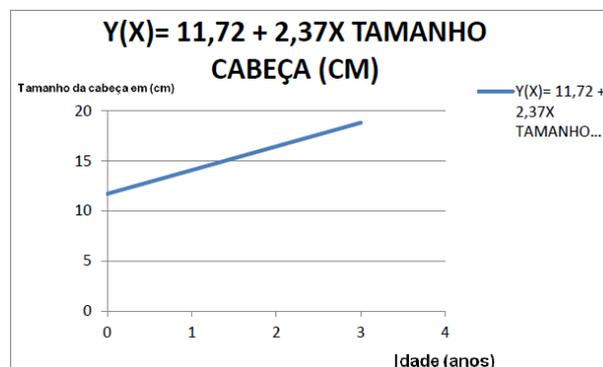
Reduzimos a matriz a um sistema 2 X 2, onde sua resolução pode ser feita pelo método da substituição, que neste caso, é o mais conveniente. Desta maneira os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  são:  $\alpha = 11,72$  e  $\beta = 2,37$ . Com os valores acima calculados, podemos voltar a

função:  $y(x) = \alpha + \beta x$ . E escrever:  $y(x) = 11,72 + 2,37x$ . O modelo acima nos remete a uma função linear, o que nos permitiu construir seu gráfico conhecendo alguns valores. Assim temos:

Quadro 9 - Idade/Tamanho da Cabeça

FUNÇÃO	$Y(X) = 11,72 + 2,37X$
IDADE (ANOS)	TAMANHO CABEÇA (CM)
0	11,72
1	14,09
2	16,46
3	18,83

Fonte: Quadro elaborada pelo autor



Lembramos que apenas deixamos como sugestão alguns encaminhamentos de soluções, diante da proposta do PBL podem surgir outras soluções trazidas pelos estudantes, elas devem ser exploradas de forma a contribuir com o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes. Também pode surgir alguma solução que não seja adequada ao problema, esta deve ser discutida e refutada.

No PBL é preciso que os estudantes entendam que cada problema a ser explorado, tem vários objetivos e expectativas de aprendizagens, envolvendo a inserção de novos conceitos ou até mesmo a aplicação de conceitos já estudados.

### Considerações Finais

Como considerações finais, iremos retomar as questões norteadoras desta pesquisa. Tínhamos interesse em apontar as potencialidades teóricas da Aprendizagem Baseada em Problemas no ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Nesse sentido, buscamos indicar a utilização desta metodologia em outras áreas do

conhecimento, entre elas, Engenharia e Medicina. Realizamos estudos teóricos que justificassem nossa escolha, ressaltamos que exceto a pesquisa de Souza (2016), não encontramos outras, no ensino de Matemática, que utilizassem esta metodologia.

Os resultados das pesquisas encontradas indicavam êxito no uso do PBL na formação profissional. Destacamos que o PBL tem o potencial de poder tornar a aprendizagem mais significativa, por articular teoria e prática.

Outra questão desse trabalho era destacar possíveis entraves ou obstáculos inerentes a essa metodologia de ensino, perante a construção do conhecimento matemático. Neste sentido buscamos mostrar quais desvantagens o uso do PBL pode apresentar no ensino e aprendizagem, salientamos que se trata de uma inovação no ensino de Matemática, por isso é necessária cautela, como o trabalho dos estudantes se dá por meio de tutorias substituindo as aulas, os objetivos precisam estar claros, a formação dos conceitos deve ter um olhar cuidadoso do professor/tutor, já que os estudantes são responsáveis por sua busca. As fontes a serem pesquisadas precisam ser seguras. Esses obstáculos podem ser superados por meio do planejamento realizado pelo tutor.

Uma desvantagem que o PBL pode trazer está relacionada a estudantes introspectivos, isso pode dificultar as tarefas ou até sua exposição perante o grupo, já que cada aluno tem uma tarefa, depois ele deverá compartilhar a conclusão da mesma com todo o grupo no qual está inserido. Outra dificuldade que pode ocorrer está relacionada aos professores, já que é uma metodologia ainda pouco explorada no ensino de Matemática, pode trazer ao profissional certa resistência em sua utilização em sala de aula.

Por se tratar de um tema pouco explorado no ensino de Matemática, realizamos uma pesquisa exploratória, não encontramos pesquisas que nos auxiliassem, exceto Souza (2016). Com este estudo observamos novas maneiras de inovar em sala de aula, por exemplo, permitindo superar o fato de que muitos estudantes não veem uma aplicação direta dos conceitos matemáticos que estudam, e que o PBL mostra uma maneira inovadora de abordar conhecimentos matemáticos por meio da prática profissional.

Acreditamos que abordar conceitos matemáticos exclusivamente de maneira abstrata pode fazer com que o conhecimento matemático não seja tratado com a devida importância nos cursos universitários, assim propor uma “nova” metodologia pode trazer significados novos, sem deixar de lado a importância da formalização e rigor matemático.

O trabalho do tutor deve ser o de instigar, questionar e provocar em seus estudantes na motivação pela busca do conhecimento. De fato, utilizar o PBL em sala de

aula é desafiador diante do cenário que hoje temos na educação brasileira, mas que pode contribuir de uma maneira positiva na formação profissional.

O PBL tem diversas características motivadoras, entre elas, o problema sempre precede a inserção de um novo conteúdo, mas não se trata de um simples problema, mas de algo real específico de uma determinada comunidade ou até mesmo do ambiente de um determinado profissional. É importante ter recursos para pesquisas, livros, artigos, internet, entre outros, já que os estudantes terão que realizar diversos estudos e pesquisas para resolver um determinado problema.

Destacamos que existem desdobramentos do nosso estudo que podem ser explorados em outras pesquisas, como aplicabilidade dessas atividades em sala de aula e as potencialidades práticas do PBL, assim como possíveis obstáculos ou entraves após sua aplicabilidade.

## **Referências**

ARAÚJO, U. F; SASTRE, G. (orgs). **Aprendizagem baseada em problemas no ensino superior**. 2. ed. São Paulo: Summus, 2009.

BARUFI, M. C. B. **A Construção/negociação de significados no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral**. 1999. 184 f. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. 3. ed. São Paulo: Contexto, 2011.

BUNGE, M. **Teoria e Realidade**. São Paulo: Perspectiva, 2008.

CHIARI, A.S.S. Ensino de álgebra linear e tendências em educação matemática: relações possíveis. In: ENEM - ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, XI. 2013. Curitiba.

ESCRIVÃO FILHO, E.; RIBEIRO, L. R. C. **Aprendendo com PBL- Aprendizagem Baseada em Problemas: Relato de uma experiência em cursos de Engenharia da EESC- USP**. Revista Minerva, v. 6, p-23-30, 2009.

GEMIGNANI, E. Y. M. Y. Formação de professores metodologias ativas de ensino-aprendizagem: ensinar para a compreensão. **Fronteiras da Educação**, Recife, U. 8, n. 2, p. 1-27, 2012. Disponível em: <<http://www.frenteirasdaeducacao.org/index.php/fronteiras/article/view/14isNn2237-9703>>. Acesso em: 11 jan. 2015.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 6. ed. São Paulo: Atlas, 2008.

HUNGER, D; LEPRE, R. M. Da necessária relação entre teoria e prática na formação acadêmica. **Jornal Unesp**, São Paulo, ano XXVII, n. 286, p. 4, mar. 2013, Disponível em: <[http://www.unesp.br/aci\\_ses/jornalunesp/acervo/286/forum-dagmar-hunger-rita-melissa](http://www.unesp.br/aci_ses/jornalunesp/acervo/286/forum-dagmar-hunger-rita-melissa)>. Acesso em: 17 jul. 2016.

MACHADO, S.D.A.; BIANCHINI, B.L. A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por estudantes de EAD. **Revemat: R. Eletr.de Edu. Matem.**, Florianópolis, v. 7, n. 2, p. 69-89, 2012.

MOREIRA, M. A. **Aprendizagem significativa em mapas conceituais**. Porto Alegre: UFRGS. Textos de apoio ao professor de Física, v. 24, n. 6, p. 1-55, 2013. Disponível em: <[http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v24\\_n6\\_moreira\\_.pdf](http://www.if.ufrgs.br/public/tapf/v24_n6_moreira_.pdf)>. Acesso: 9 jul. 2016.

QUEIROZ, A. PBL, Problemas que trazem soluções. **Revista Psicologia, Diversidade e Saúde**, Salvador, p. 26-38, dez. 2012.

REZENDE, W. M. **O ensino de cálculo: dificuldades de natureza epistemológica**. 2003. 450 f. Tese (Doutorado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, 2003.

RIBEIRO, L.R.de C. Aprendizagem baseada em problemas (PBL) na educação em engenharia. **Revista de Ensino de Engenharia**, v. 27, n. 2, p. 23-32, 2008.

SCHMDT, H. G. Problem-based learning: na Introduction. **Instructional Science**, n. 22, p. 247-250, 1994.

SCHMDT, H. G.et al. Problem-Based learning is compatible with Human Cognitive Architecture: commentary on Kirschner, Sweller, And Clarck (2006). **Educational Psychologist**, v. 42, n. 2, p. 91-97, 2007.

SOUZA, D. V.de. **O ensino de noções de cálculo diferencial e integral por meio da aprendizagem baseada em problemas**. 2016.159f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Instituto Federal de Ciência e Tecnologia de São Paulo, São Paulo, 2016.

STEWART, J. **Cálculo**. São Paulo: Cengage Learning, 2015. V. 1.