

**IMPLEMENTAÇÃO JAVA NO ESTUDO DO ERRO RESIDUAL  
DA EQUAÇÃO DO TRANSPORTE DE CONTAMINANTES**  
**JAVA IMPLEMENTATION IN THE STUDY OF RESIDUAL ERROR  
OF THE EQUATION OF TRANSPORT OF CONTAMINANTS**

Alessandro Firmiano<sup>\*</sup>  
João Paulo Martins<sup>\*\*</sup>  
Edson Wendland<sup>\*\*\*</sup>

**Resumo**

A estimativa confiável do erro real em uma simulação numérica é tão importante quanto a robustez do próprio código computacional. Neste trabalho, é apresentada uma comparação entre os índices de eficiência de um indicador de erro residual  $\eta_R$  e de um estimador de erro  $\eta_{ZZ}$  que emprega a técnica de recuperação de gradiente para a equação do transporte de contaminantes em água subterrânea. O comportamento assintótico e estável do indicador residual confirmou a sua aplicabilidade para as equações de advecção-dispersão-reação e o estimador  $\eta_{ZZ}$  não obteve, com qualidade desejável, boas estimativas para o erro real dessas equações em regime pequena advecção.

**Palavras-chave:** Estimador residual. Equação de advecção-dispersão-reação. Meio poroso saturado. Índice de eficiência. Código Java. Método dos elementos finitos.

**Abstract**

A reliable estimate of the actual error in a numerical simulation is as important as the robustness of the computer code itself. In this paper, we present a comparison between the efficiency index of an indicator of residual error  $\eta_R$  and an estimator  $\eta_{ZZ}$  that employs error recovery technique for the gradient equation of contaminant transport in groundwater. The asymptotic behavior of the indicator and stable residual confirmed its applicability for the equations of advection-dispersion-reaction and did not get  $\eta_{ZZ}$  estimator with desirable quality, good estimates for the actual error of these equations under small advection regime.

**Keywords:** Residual estimator. Equation of advection-dispersion-reaction. Saturated porous medium. Efficiency index. Java code. Finite element method.

**Introdução**

Resultados computacionais, mesmo quando obtidos de um apropriado modelo matemático que caracteriza um fenômeno físico de interesse, não estão inunes aos erros

---

<sup>\*</sup> Docente na Academia da Força Aérea AFA-Pirassununga/SP. [lezandro@sc.usp.br](mailto:lezandro@sc.usp.br)

<sup>\*\*</sup> Docente na Academia da Força Aérea AFA-Pirassununga/SP. [jp2@usp.br](mailto:jp2@usp.br)

<sup>\*\*\*</sup> Prof. Titular no Dept. de Hidráulica e Saneamento da EESC/USP. [ew@sc.usp.br](mailto:ew@sc.usp.br)

numéricos inseridos pelos processos de discretização. Equações diferenciais parciais ou equações integrais quando são manipuladas por dispositivos digitais perdem informações, uma vez que as aproximações numéricas diferem do modelo contínuo.

Estes erros de aproximação, quando ultrapassam certa magnitude, invalidam a predição numérica do modelo matemático. Embora ocorram com frequência, os erros de aproximação são difíceis de identificar e de avaliar com medidas intuitivas ou heurísticas. Nos últimos 20 anos, teorias matemáticas e procedimentos computacionais foram desenvolvidos para estimar o erro de aproximação em soluções numéricas dos problemas de valores iniciais e de fronteiras em diversas áreas da Engenharia (DONEA; HUERTA, 2004). Neste cenário surgem técnicas e demonstrações matemáticas para fundamentar os chamados estimadores de erro *a posteriori*. Assim, se o erro estimado pode ser controlado, é possível melhorar a qualidade da solução numérica ou pela modificação da malha que representa o domínio, ou pelo aumento da ordem da função de aproximação, ou otimização do passo de tempo ou por outro processo do algoritmo numérico capaz de reduzir o erro.

Na estimativa *a posteriori* do erro da solução numérica do modelo de transporte de contaminantes em regime de pequena advecção, neste trabalho será empregado um indicador de erro espacial  $\eta_R$ , proveniente do método explícito dos estimadores residuais. Esses modelos computacionais que implementam a migração de soluto em meio poroso saturado surgem constantemente em publicações científica [(HOSSAIN; MIAH, 1999), (HUANG; HUANG; ZANG, 2008), (KUMAR; DODAGOUDAR, 2008) e (SOREK, 1988)] devido à suma importância dada à compreensão e previsão do transporte de constituintes dissolvidos em água subterrânea. Assim, o objetivo deste artigo é comparar a performance e aplicabilidade do indicador espacial residual  $\eta_R$  com o estimador de erro  $\eta_{ZZ}$ , oriundo da classe de estimadores de erro que emprega o método de recuperação do gradiente (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992a).

Para esta discussão, inicialmente será definido uma quantidade  $E_f = \frac{\eta}{\|e\|}$  como sendo o índice de eficiência para medir a qualidade de aproximação do indicador de erro  $\eta$  em relação ao erro real (BABUSKA et al., 1994). Quando  $E_f \approx 1$ , o indicador  $\eta$  encontra-se próximo da norma do erro real  $\|e\|$ , que pode ser obtido com a implementação de uma solução analítica disponível na literatura. Mesmo sendo rara a determinação da norma  $\|e\|$  para a maioria dos modelos matemáticos, existem certos problemas padrão onde o erro  $e$  ou a solução  $u$  são conhecidos ou são computados sob

uma desejável precisão. Assim, a confiabilidade e a robustez de diversos indicadores propostos podem ser numericamente verificadas.

## 1 Equações Governantes

O modelo matemático para descrever a equação de advecção-dispersão-reação (ADR) do transporte de contaminantes em água subterrânea é dado por:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t C - \text{div}(\mathbf{D}\nabla C) + \mathbf{v} \cdot \nabla C + \lambda C = f & \text{em } \Omega \times (0, T] \\ C = C_D & \text{sobre } \Gamma_D \times (0, T] \\ \mathbf{n} \cdot \mathbf{D}\nabla C = g & \text{sobre } \Gamma_N \times (0, T] \\ C = C_0 & \text{em } \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  o domínio poligonal limitado com fronteira Lipschitz  $\Gamma$  consistindo de duas partes disjuntas,  $\Gamma_D$  a fronteira de Dirichlet e  $\Gamma_N$  a fronteira de Neumann, tais que  $\Gamma_D \cup \Gamma_N = \Gamma_\Omega$ . O tempo final  $T$  é arbitrário, no entanto, precisa ser especificado. A matriz de dispersão  $\mathbf{D}$  é continuamente diferenciável e simétrica, uniformemente definida positiva e isotrópica. E ainda, o campo de velocidades  $\mathbf{v}$  é constante e o termo de reação  $\lambda$  é uma função escalar contínua e não-negativa (VERFÜRT, 2008).

### 1.1 Uma Solução Analítica

Visando a comparação entre a solução numérica da equação do transporte (1) e a correspondente solução analítica 2D disponível na literatura (p. ex. em WEXLER, 1992), para avaliação do índice de eficiência de cada indicador, algumas hipóteses sobre o aquífero em estudo precisam ser consideradas, entre elas (KRESIC, 2006):

- o aquífero de extensão infinita possui frente inicial de contaminação não pontual de comprimento finito;
- a densidade e a viscosidade do fluido são constantes;
- o contaminante está sujeito a transformação química de primeira ordem;
- o fluxo uniforme ocorre na direção  $x$  com velocidade constante  $v$  e
- os coeficientes de dispersão longitudinal e transversal ( $D_x$ ,  $D_y$ ) são constantes.

As condições iniciais e de contorno para obter a solução analítica do transporte de contaminantes em aquíferos, que obedecem às considerações acima, são dadas por:

$$\begin{aligned}
 C = C_0, \quad x = 0 \text{ e } Y_1 < y < Y_2 & & C = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial x} = 0, \quad x = \infty \\
 C = 0, \quad x = 0 \text{ e } y < Y_1 \text{ ou } y > Y_2 & & C = 0, \quad \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \quad y = \pm\infty
 \end{aligned}$$

sendo  $Y_1$  a ordenada do limite inferior da fonte de contaminante em  $x = 0$  e

$Y_2$  a ordenada do limite superior da fonte de contaminante em  $x = 0$ .

Assim, segundo Wexler (1992), a solução analítica 2D é expressa por:

$$C(x, y, t) = \frac{C_0 x}{\sqrt{\pi D_x}} e^{\left[\frac{vx}{2D_x}\right]} \int_0^{\frac{1}{Z^4}} \frac{1}{Z^3} e^{\left[-\left(\frac{v^2}{4D_x} + \lambda\right)Z^4 - \frac{x^2}{4D_x Z^4}\right]} \left\{ \operatorname{erfc}\left[\frac{Y_1 - y}{2Z^2 \sqrt{D_y}}\right] - \operatorname{erfc}\left[\frac{Y_2 - y}{2Z^2 \sqrt{D_y}}\right] \right\} dZ \quad (2)$$

O termo referente à integral da solução acima é aproximado, no código JAVA, pela implementação da fórmula de translação Gauss-Legendre (MATHEWS, 2004).

## 1.2 Indicador de Erro Residual Espacial

Em situações em que na equação (1) o termo advectivo é dominante sobre o dispersivo, será visto que o método residual apresenta-se como a técnica apropriada para obter estimativas *a posteriori* do erro da solução numérica da equação ADR (JESUS, 2010). Nesse método residual, a contribuição de cada elemento  $K$  de uma triangulação  $\mathcal{T}$ , para a estimativa do erro espacial da malha é obtida pelo indicador:

$$\begin{aligned}
 R_K = f_I - \frac{1}{\tau_n} (C_{\mathcal{T}_n}^n - C_{\mathcal{T}_{n-1}}^{n-1}) + \operatorname{div}(D^n \nabla(\theta C_{\mathcal{T}_n}^n + (1-\theta)C_{\mathcal{T}_{n-1}}^{n-1})) \\
 - \mathbf{v}^n \cdot \nabla(\theta C_{\mathcal{T}_n}^n + (1-\theta)C_{\mathcal{T}_{n-1}}^{n-1}) - \lambda^n (\theta C_{\mathcal{T}_n}^n + (1-\theta)C_{\mathcal{T}_{n-1}}^{n-1})
 \end{aligned} \quad (3)$$

sendo  $f_I(\cdot, t) = \pi_n(\theta f(\cdot, t_n) + (1-\theta)f(\cdot, t_{n-1}))$  uma função constante por parte dada pela projeção  $\pi_n$  da interpolação convexa de  $f$  e  $\theta$  um parâmetro de discretização do esquema  $\theta A$  – estável.

Dessa forma, um indicador de erro espacial *a posteriori* e com características residuais, para a equação parabólica (1), será dado por:

$$\eta_R = \left\{ \sum_{K \in \mathcal{T}} \alpha_K^2 \|R_K\|_{L^2(K)}^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

sendo  $\alpha_K = \min \left\{ h_K \varepsilon^{-\frac{1}{2}}, \lambda^{-\frac{1}{2}} \right\}$  a função de ponderação;  $h_K$  o diâmetro do elemento  $K$  e  $\varepsilon > 0$ , o menor autovalor da matriz  $\mathbf{D}$ .

A norma  $L^2$  do indicador elemento residual (4), quando implementada em linguagem JAVA, é determinada utilizando os pontos de Gauss do elemento quadrilátero delimitado pelas funções Lagrangeanas  $\Phi_j = \frac{1}{4}(1-u_ju)(1-w_jw)$  em coordenadas locais  $(u, w)$ .

### 1.3 O Estimador ZZ

O método de recuperação mais popular é o conhecido Método Superconvergente de Recuperação do *Patch* (ZIENKIEWICZ; ZHU, 1992b). Nesta técnica, se  $u_h$  é a solução numérica, um ajuste polinomial de alta ordem é realizado sobre os valores nodais do  $\nabla u_h$  sobre um conjunto de elementos adjacentes que compartilham um nó da malha (o chamado *patch*). Na sequência, é empregada uma regressão, através do método dos mínimos quadrados, para determinar uma aproximação melhorada  $G$  da quantidade  $\nabla u$ . Assim, a norma  $L^2$  da diferença  $G - \nabla u_h$  sobre o elemento  $K$  é usada como indicador de erro local  $\eta_K$ , isto é,

$$\varepsilon_K \approx \eta_K = \sqrt{\int_K |G(u_h) - \nabla u_h|^2 dx}.$$

O erro global estimado pela técnica SPR é dado por:  $\eta_{ZZ} = \left\{ \sum_{K \in \Omega} \eta_K^2 \right\}^{\frac{1}{2}}$  (5)

Este estimador de erro  $\eta_{ZZ}$  possui atrativas propriedades identificadas pela facilidade de implementação e pela independência dos operadores que caracterizam o problema que está sendo resolvido, podendo ser aplicado tanto para problemas lineares quanto não lineares.

### 1.4 O Problema Teste

Para a avaliação dos índices de eficiência do indicador  $\eta_R$  e do estimador  $\eta_{ZZ}$ , para a equação do transporte de contaminantes, é implementada uma fonte não pontual contendo o elemento reativo  $^{90}\text{Sr}$  (estrôncio-90) que migra facilmente de um

armazenamento de resíduos radioativos para um aquífero confinado. As variáveis do modelo de transporte implementadas no código JAVA são as apresentadas na tabela 1 e a solução numérica é comparada com a solução analítica (2).

As dimensões do domínio computacional retangular são 1000m de comprimento por 800m de largura. A malha inicial foi dividida de forma que os 1024 elementos retangulares sobreponham os 1089 nós igualmente espaçados na direção  $x$  e na direção  $y$ . A técnica empregada na solução numérica para evitar o surgimento de concentrações negativas e oscilações espúrias foi o esquema *Symmetrical Streamline Stabilization* ( $S^3$ ) (WENDLAND, 2000). A discretização temporal da equação (1) foi obtida pelo popular método de Crank-Nicolson (AKRIVIS et al., 2000).

**Tabela 1 – Variáveis do transporte de  $^{90}\text{Sr}$  em aquífero confinado, adaptadas de WEXLER (1992).**

VARIÁVEL	INPUT DOS DADOS
Velocidade uniforme (m/dia)	<code>double Vx = 1.0; //velocidade em x</code> <code>double Vy = 0.0; //velocidade em y</code>
Dispersividade longitudinal (m)	<code>double longiDisp = 100.0;</code> <code>// de 0.1m a 100m - (Kumar, 2009)</code>
Dispersividade transversal (m)	<code>double transDisp = 20.0;</code>
Porosidade efetiva	<code>double poro = 0.15; // porosidade</code>
Frente de contaminante (m)	<code>int Ymed = 3; // nós acima e abaixo da contaminação pontual.</code>
Concentração de $^{90}\text{Sr}$ (mg/L)	<code>double solute = 100.0;</code>
Decaimento de 1ª ordem (1/dia)	<code>double reaction = 0.0000678; // meia vida do <math>^{90}\text{Sr}</math> = 28 anos</code>
Coefficiente theta	<code>double theta = 1.0/2.0; // método de Crank-Nicolson-Galerkin</code>
Solução Analítica	<code>boolean AnalyticalSolution = true;</code> <code>// solução 2D de Wexler 1992</code>

`package org.arena.water.gwfem2d.transport2D`

## 2 Resultados e discussão

A partir da disponibilização digital dos dados numéricos gerados numa simulação de  $T = 2.000$  dias, é possível obter a visualização gráfica de cada solução e dos seus índices de eficiência.

A figura 1 compara a frente de contaminação determinada pela solução analítica (2) com a respectiva solução numérica por elementos finitos (DONEA; HUERTA, 2004), ambas implementadas no mesmo código JAVA.

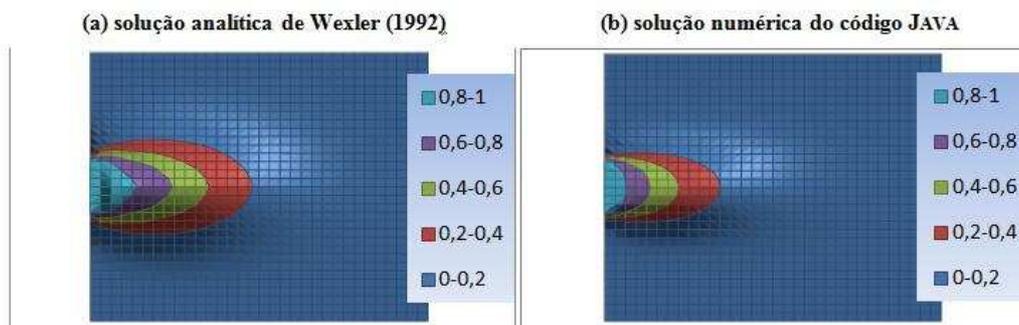


FIGURA 1 – Comparação entre a solução analítica (a) e a solução numérica (b) do transporte do  $^{90}\text{Sr}$  em aquífero confinado no instante  $t = 800d$

Verifica-se na figura 1 que a frente de contaminação da solução numérica encontra-se atrasada em relação à frente da solução analítica. O objetivo do indicador residual espacial é controlar esse erro de discretização, fornecendo uma estimativa confiável do erro real, para que estratégias adaptativas sejam conduzidas e que a qualidade da solução numérica esteja assegurada.

Considerando cada passo de tempo  $t_n$ , de uma partição do intervalo  $I = [0, T]$ , o

índice de eficiência sobre a malha grosseira é definido por:  $E_f = \frac{\eta_{\mathcal{T}_n}^n}{\|e\|}$  (6)

sendo  $\eta_{\mathcal{T}_n}^n$  o erro residual espacial da solução numérica da equação (1) sobre a malha  $\mathcal{T}_n$  e  $\|e\|$  a norma euclidiana do erro real.

Uma análise de erro *a posteriori* apresentada pelo código JAVA no instante arbitrário  $t = 800d$  é:

```

Erro da malha atual: 05.6194
Erro máximo de 00.3810 no nó: 661
Erro residual espacial da malha: 11.2572
Erro relativo da solução 0.0110
Erro residual MAX = 2.9286 (elemento 416)
Erro residual MIN = 0.0001 (elemento 975)
-----
time: 800.0
-----
    
```

Verifica-se que no instante indicado ( $t = 800d$ ) o indicador residual espacial possui um índice de eficiência dado por

$$E_f = \frac{\eta_{\mathcal{T}_n}^n}{\|e\|} = \frac{11,2572}{5,6194} = 2,0033.$$

Esse valor é considerado aceitável para vários problemas da Engenharia (AINSWORTH; ODEN, 2000).

Para os demais valores de  $t_n$  no intervalo  $I$ , a figura 2 exibe uma curva de ajustamento com adequada aproximação do índice de eficiência  $E_f$  determinados em todos os passos de tempo da simulação numérica.

Nos primeiros passos de tempo, as oscilações iniciais da solução numérica são responsáveis por apresentar valores do índice de eficiência acima do especificado para a maioria dos problemas da Engenharia, ou seja, segundo Ainsworth e Oden (2000), valores acima de 3,0.

No entanto, verifica-se pela figura 2 que o índice de eficiência aproxima-se de 1,0 conforme o tempo avança, ou seja, o indicador residual espacial  $\eta_{T_n}^n$ , encontra-se cada vez mais próximo do erro real  $\|e\|$ , sendo assim, caracterizado como um estimador assintoticamente estável, pois,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\eta_R}{\|e\|} = 1$$

O limite acima assegura a qualidade do indicador de erro residual espacial definido pela equação (4).

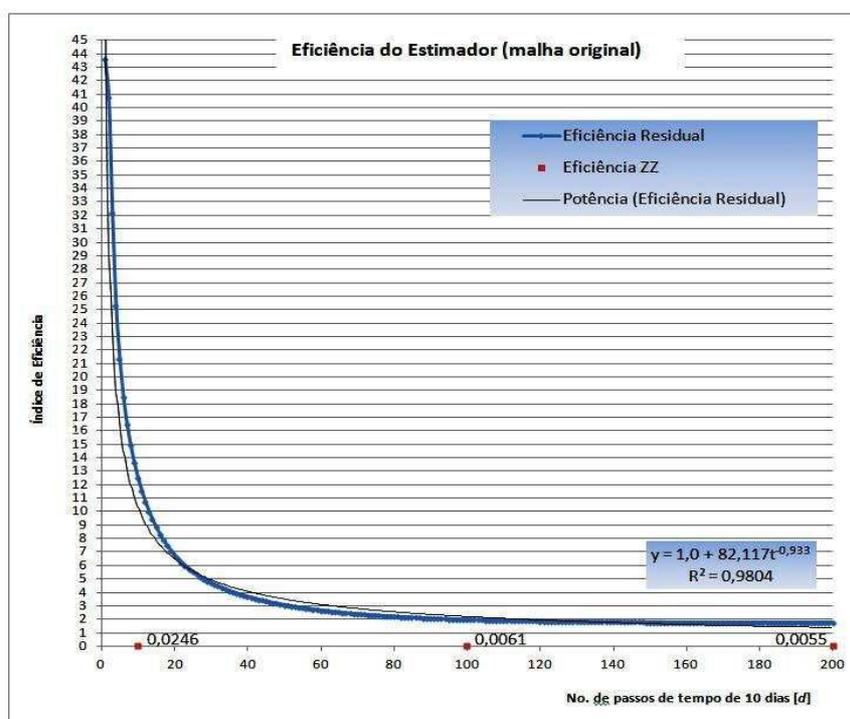


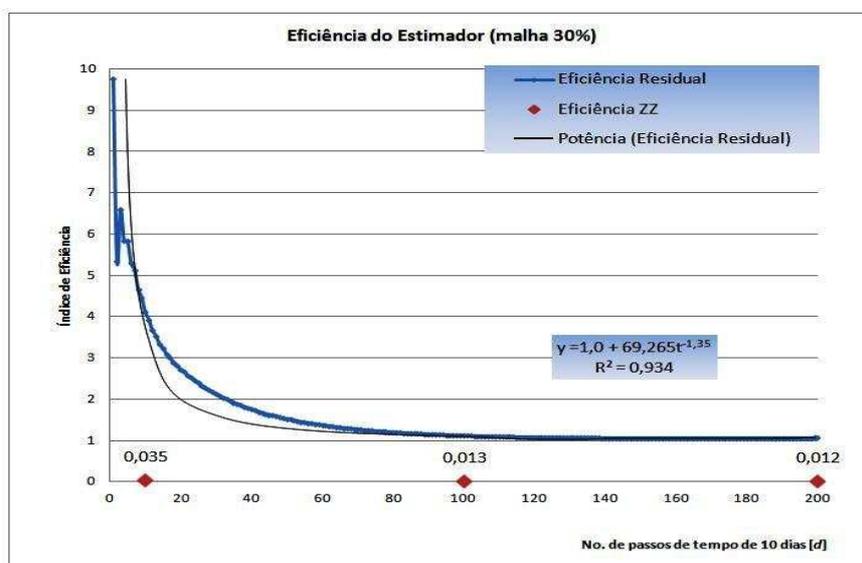
FIGURA 2 – Eficiência do indicador de erro residual em função do passo de tempo. O indicador residual é assintoticamente estável e a sua taxa de convergência é da ordem de uma função potência com confiança de 98,04%. A eficiência do estimador ZZ é quase nula para todos os passos de tempo.

O estimador ZZ, proveniente da técnica de recuperação do gradiente dado por Zienkiewicz e Zhu (1992a) e validado para a equação elíptica do fluxo subterrâneo (JESUS, 2010) também é analisado em todos os passos de tempo da simulação numérica e a sua eficiência avaliada.

Verificou-se que o índice de eficiência do estimador ZZ é quase nulo para todos os passos de tempo. A figura 2 também ilustra o valor de  $E_f$  para o estimador ZZ em apenas três instantes de tempo ( $t = 100d$ ,  $t = 1000d$  e  $t = 2000d$ ) mostrando que esse estimador não é adequado para o transporte de contaminantes, e ainda, o estimador ZZ subestima o erro real da solução numérica da equação parabólica (1).

Valores adequados para o indicador residual espacial,  $1,0 < \eta_{T_n}^n \leq 2,0$ , são observados a partir do 75º passo de tempo e a taxa de convergência no tempo do elemento residual de pode ser obtida pela curva de ajuste da figura 5.5, a função potência  $y = 1,0 + 82,117t^{-0,933}$  (7) com 98,04% de confiança, sendo  $t$  o número de passos de tempo da simulação numérica.

Em uma segunda análise é feita uma reorganização dos nós da malha inicial em uma estratégia que concentra os nós disponíveis junto à frente de contaminação (*delay* de 30%). Nesta nova malha deformada, o índice de eficiência é reavaliado e o correspondente indicador residual mostra-se assintoticamente estável com melhora significativa na sua taxa de convergência, conforme indicado na figura 3.



**FIGURA 3 – Eficiência do indicador de erro residual em função do passo de tempo. O indicador residual é assintoticamente estável e a sua taxa de convergência é da ordem de uma função potência com confiança de 93,4%. A eficiência do estimador ZZ é quase nula para todos os passos de tempo.**

O código JAVA ainda fornece a seguinte análise de erro *a posteriori* que foi obtido em um instante arbitrário  $t = 700d$  :

```

Erro da malha atual: 04.8804
Erro máximo de 00.6165 no nó: 661

Erro residual espacial da malha: 6.1780
Erro relativo da solução 0.0060
Erro residual MAX = 0.9579 (elemento 455)
Erro residual MIN = 0.0000 (elemento 21)
-----
time: 700.0
-----

```

Verifica-se que no instante indicado, o estimador de erro residual possui um índice de eficiência dado por  $E_f = \frac{\eta_x}{\|e\|} = 1,2659$ . Isto significa que o indicador residual espacial, na malha deformada e  $t = 700d$ , encontra-se mais próximo do erro real do que na malha original para  $t = 800d$ , cuja eficiência era  $E_f(800) \approx 2,0$ . Observa-se ainda que o índice de eficiência no passo de tempo  $t = 700d$ , da malha deformada, é superior ao índice de eficiência determinado em todos os passos de tempo da malha original, pois, no último passo de tempo dessa malha original calcula-se  $E_f(2000) = 1,7439$ .

A tabela 2 confronta os valores da eficiência determinada na malha sem o atraso com os valores na malha deformada e mostra a boa resposta do indicador residual para o referido reposicionamento dos nós na obtenção da nova solução numérica.

**Tabela 2 – Eficiência do indicador de erro residual na malha original e na malha deformada**

Passo	Delay = 0,0	Delay = 0,3
$t = 10$	12,5093	4,1098
$t = 50$	3,0622	1,5256
$t = 75$	2,2856	1,2360
$t = 100$	1,9687	1,1214
$t = 150$	1,7703	1,0611
$t = 175$	1,7478	1,0606
$t = 200$	1,7439	1,0542

Verifica-se, na figura 3, que o índice de eficiência do estimador residual aproxima-se de 1,0 logo após o 50º passo de tempo na malha deformada. Ou seja, o indicador residual demonstrou-se mais eficiente nesse tipo de malha para o transporte de contaminantes, em relação à malha original com *delay* nulo.

A taxa de convergência do indicador residual pode ser estimada pela curva de ajustamento da figura 3, a função potência  $y = 1,0 + 69,265t^{-1,35}$  (8) com 93,4% de confiança. Verificou-se novamente que o índice de eficiência do estimador ZZ é quase nulo para todos os passos de tempo. A figura 3 também ilustra esses baixos valores dos

índices de eficiências  $E_f$  para o estimador ZZ em apenas três instantes de tempo ( $t = 100d$ ,  $t = 1000d$  e  $t = 2000d$ ).

### **Considerações finais**

É apresentado um indicador de erro *a posteriori* para a solução numérica da equação do transporte de contaminantes em meio poroso saturado. Um código computacional foi desenvolvido em linguagem JAVA, para comparar a solução numérica da equação de advecção-dispersão-reação com a sua correspondente solução analítica dada por Wexler (1992), em meio isotrópico e homogêneo, com campo de velocidades uniforme e regime predominantemente advectivo. Conclui-se que o indicador de erro pertencente à classe dos métodos residuais apresenta performance superior ao estimador de erro da classe dos métodos de recuperação, o estimador ZZ, quando o regime de transporte é o de pequena advecção.

De simplicidade computacional, o indicador residual  $\eta_R$  demonstrou-se assintoticamente estável para os problemas testes do transporte de contaminantes validados na literatura. O estimador ZZ, que emprega os métodos de recuperação do gradiente, apresentou baixos índices de eficiência para a mesma aplicação. E ainda, com a reorganização dos nós da malha inicial em uma estratégia que concentra os nós disponíveis junto à frente de contaminação, o indicador residual apresentou um aumento na taxa de convergência do índice de eficiência para o valor 1,0 conforme é realizado o avanço no passo de tempo.

### **Referências**

- AINSWORTH, M; ODEN, J. T. **A posteriori error estimation in finite element analysis**. New York: Wiley-IEEE, 2000.
- AKRIVIS, G.; MAKRIDAKIS, C.; NOCHETTO, R. A posteriori error estimates for the Crank-Nicolson method for parabolic equations. **Math. of Computation**, v. 75, p. 511-531, 2006.
- BABUSKA, I. et al. Validation of a posteriori error estimators by numerical approach. **Int. J. Numer. Methods Engrg.**, v. 37, p. 1073-1123, 1994.
- DONEA, J.; HUERTA, A. **Finite element methods for flow problems**. New York: John Wiley & Sons, 2004.
- HOSSAIN, M. A.; MIAH, A. S. Crank-Nicolson-Galerkin model for transport in groundwater: Refined criteria for accuracy. **Applied Mathematics and Computation**, v. 105, p. 173-181, 1999.
- HUANG, Q.; HUANG, G.; ZANG, H. A finite element solution for the fractional advection-dispersion equation. **Advances in Water Resources**, v. 31, p. 1578-1589, 2008.

- JESUS, A. F. **Um estimador de erro *a posteriori* para a equação do transporte de contaminantes em regime de pequena advecção.** 2012. 150 p. Tese (Doutorado em Engenharia) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2010.
- KRESIC, N. **Hydrogeology and groundwater modeling.** 2. nd. New York: CC Press, 2006.
- KUMAR, B. P.; DODAGOUDAR, G. R. Two-dimensional modeling of contaminant transport through saturated porous media using the radial point interpolation method (RPIM). **Hydrogeology Journal**, v. 16, p. 1497-1505, 2008.
- MATHEWS, J. **Numerical methods using matlab.** New Jersey: Prentice Hall, 2004.
- SOREK, S. Two-dimensional adaptive eulerian-lagrangian method for mass transport with spatial velocity distribution. **Transport in Porous Media**, v. 3, p. 473-489, 1988.
- VERFÜRT, R. **Adaptive finite element methods lecture notes winter term 2007/08 fakultät für mathematik.** Deutschland: Ruhr-Universität Bochum, 2008.
- ZIENKIEWICZ, O. C.; ZHU, J. Z. The Superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimators. Part 1. The recovery technique. **Int. Journal Numer. Methods Eng.**, v. 33, p. 1331-1364, 1992a.
- \_\_\_\_\_. The Superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimators. Part 2. Error estimates and adaptivity. **Int. Journal Numer. Methods Eng.**, v. 33, p. 1365-1382, 1992b.
- WENDLAND, E. A symmetrical streamline stabilization scheme for high advective transport. **Inter Journal for Analytical and Num Methods in Geomechanics**, v. 24, n. 1, p. 29-45, 2000.
- WEXLER, E. **Applications of hydraulics analytical solutions for one-, two- and three-dimensional solute transport in groundwater systems with uniform flow** – Chapter B7 Techniques of Water-Resources Investigations of the USGS, Denver USA, 1992.